

Основы теории линейных стационарных цепей и систем

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

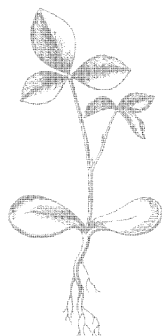
УРАЛЬСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. С. М. КИРОВА

Н. И. КИРСАНОВ, Н. Н. БЕЛОУСОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЧАСТЬ II



Scan AAW

Н. И. Кирсанов, Н. Н. Белоусов. Основы теории линейных стационарных цепей и систем. Учебное пособие. Часть II. Свердловск, изд. УПИ им. С. М. Кирова, 1974, стр. 128.

В книге изложены методы анализа цепей и систем при принужденном экспоненциальном воздействии, особенности расчета цепей с взаимной индукцией, элементы теории линейных систем и анализ цепей и систем методом пространства состояния.

Предназначается для студентов электротехнических и радиотехнических специальностей. Может быть также рекомендована для преподавателей и аспирантов соответствующих специальностей.

Рис. 79. Библ. 8 назв.

ПРЕДИСЛОВИЕ

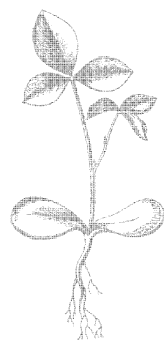
Вторая часть учебного пособия «Основы теории линейных стационарных цепей и систем» делится на две главы. В первой главе излагаются с единой системно-информационной точки зрения методы анализа стационарных линейных цепей и систем. Материал этой главы соответствует программе курса «Основы теории цепей» для радиотехнических специальностей.

Во второй главе излагаются элементы теории линейных систем, анализ цепей и систем методом пространства (переменных) состояния. Этот материал является новым. По глубокому убеждению авторов, он должен быть в скором времени включен в программы соответствующих курсов при обучении студентов. Этот материал особенно необходим для студентов, обучающихся по специальностям «Автоматизированные системы управления» и «Автоматика и телемеханика».

Подход к объекту исследования как к системе выражает одну из главных особенностей современного научного познания. Этот подход получил широкое распространение в связи с развитием теории управления и изобретением универсальной цифровой машины. Влияние теории систем и системного подхода начинают испытывать на себе традиционные научные направления и учебные дисциплины. Развитие теории и практики управления, а также цифровых машин пробудило интерес к классическим методам изучения фазового пространства. Метод передаточных функций для изучения цепей и систем оказался недостаточным. Целый ряд явлений при изучении цепей и систем этим методом ускользает из поля зрения исследователя и разработчика.

Метод пространства состояний является наиболее адекватным математическим аппаратом при анализе систем. Этот метод выводит инженера за пределы интуиции и позволяет ответить на новые запросы практики в связи с разработкой сложных систем. Системный подход и метод пространства состояний необходим для достижения более высокой степени обобщения, чем это позволяет сделать, например, теория цепей.

Авторы не исключают возможности, что теория линейных цепей и теория систем будут развиваться как самостоятельные дисциплины. Однако сейчас есть острая необходимость излагать эти научные направления с единых позиций и сделать их достоянием студентов.



Scan AAW

Глава I

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ ПРИ ПРИНУЖДЕННОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

§ 1. Цель анализа. Основные определения

Целью анализа (расчета) электрических цепей является определение токов во всех ветвях и потенциалов во всех точках цепи. В случае принужденного режима эта задача в самом общем виде может быть решена путем нахождения частного решения дифференциального уравнения, составленного относительно неизвестной физической величины, г. е. относительно мгновенного значения тока в какой-либо ветви, или потенциала в какой-либо точке цепи. Если воздействие является периодическим, то в цепи устанавливается отклик, при котором токи и потенциалы в любых ветвях и точках цепи соответственно будут изменяться периодически. Такой принужденный режим называется установившимся. Следовательно, установившийся режим есть частный случай принужденного режима, когда воздействие является периодическим. В первой части нами рассмотрены методы определения отклика в принужденном режиме, когда воздействием будет экспоненциальная функция. В этой части рассматриваются методы анализа систем и расчета цепей при экспоненциальном воздействии.

При расчете цепей и анализе систем заданными являются воздействие, т. е. источники э. д. с. или тока, параметры и структура цепи, а также начальное состояние цепи.

В дальнейшем мы будем считать, что начальные условия являются нулевыми. Ток и напряжение в ветвях и узлах цепи соответственно являются переменными состояниями системы. Определение этих переменных состояний — основная задача расчета.

Целью анализа информационных систем является определение преобразованного системой отклика по заданному воздействию. Теория связи с математической точки зрения есть теория преобразования множеств. При этом задачей анализа является определение способа функционирования данной системы. Нахождение системы, удовлетворяющей заданным условиям функционирования, в частности нахождение наилучшей системы, является задачей синтеза.

Для решения задачи синтеза не обязательно определять переменные состояния во всех ветвях и узлах схемы цепи. Чаще всего достаточно установить зависимость между воздействием и откликом в системе или между переменными состояниями в различных ее участках. Эта задача решается с помощью функций системы, точное определение которых будет дано ниже. Однако для нахождения собственных функций системы по заданным ее параметрам и структуре часто возникает необходимость в расчете токов и напряжений в ветвях и узлах заданной цепи.

Поэтому мы прежде всего остановимся на методике расчета токов и напряжений (переменных состояния) в электрических линейных цепях. Вначале определим, что мы будем понимать под методами расчета и анализа цепей и систем.

Любую линейную цепь и систему с сосредоточенными постоянными можно рассчитать с помощью первого и второго законов Кирхгофа. Однако такой расчет цепи не является оптимальным по критерию экономичности времени. Кроме того, при расчете систем отпадает необходимость в определении токов и напряжений во всех цепях и узлах цепи. Поэтому под методами расчета цепей и анализа систем будем понимать оптимальные приемы расчета и анализа, при которых достигается максимальная экономия во времени при определении реакции системы по заданному воздействию.

§ 2. Метод преобразования схем

Метод преобразования схем (метод подсхем) основан на возможности замены как цепи в целом, так и отдельных ее частей (подсхем) более простыми эквивалентными цепями по определен-

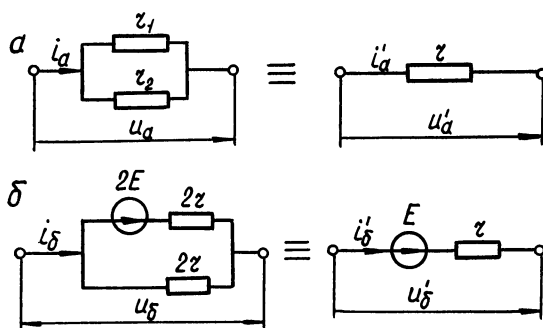


Рис. 1. Эквивалентные схемы.

ным правилам. Любой многополюсник будем считать эквивалентным второму многополюснику, имеющему то же число полюсов, что и первый, если включение каждого из них в любую электрическую цепь приводит к появлению одних и тех же токов и напряжений в точках соединения многополюсника и указанной цепи.

В качестве примера рассмотрим двухполюсники, схемы которых приведены на рис. 1, а и 1, б. Обе схемы попарно являются эквивалентными, так как описываются одинаковыми уравнениями относительно внешнего тока и напряжения. Действительно, для схемы рис. 1, а имеем:

$$i_a = \frac{u_a}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}};$$

для второй схемы $i'_a = u'_a / r$, но если $r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, $u_a = u'_a$, то токи в схемах во внешних ветвях $i_a = i'_a$.

Для схемы рис. 1, б имеем:
для первой схемы

$$i_6 = \frac{u_6}{2r} + \frac{u_6 + 2E}{2r};$$

для второй схемы

$$i'_6 = \frac{u'_6 + E}{r},$$

но если $u_6 = u'_6$, то $i_6 = i'_6$.

Весь расчет методом преобразования схем можно подразделить на следующие этапы.

1. Заданная цепь подразделяется (расщепляется) на несколько соответствующим образом соединенных подсхем и для каждой из них составляются уравнения в такой форме, чтобы обеспечить дальнейшее преобразование цепи.

2. Путем постепенного преобразования (свертывания) отдельных подсхем заданная цепь приводится к настолько простому виду, чтобы расчет ее не представлял особых затруднений.

3. После расчета полученной простой цепи производится обратное преобразование цепи и приведение ее к исходному виду с одновременным нахождением всех подлежащих определению величин.

Этот метод применим к расчету сложных электрических цепей с постоянными параметрами. Для нелинейных цепей возможность его применения ограничивается лишь некоторыми частными случаями.

Для уяснения содержания данного метода сначала рассмотрим возможные способы соединения различных элементов цепи. В современных системах приходится анализировать цепи с большим

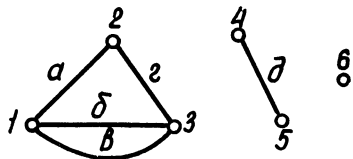


Рис. 2. Изображение ненаправленного графа.

числом элементов. В наиболее сложных системах количество элементов доходит до 10^7 .

Различные способы соединения элементов определяют структуру цепи. Структура цепи наиболее полно отображается графом цепи. Ненаправленный граф цепи будем называть сетью.

Ненаправленным графом называют геометрическую фигуру, образованную точками и соединяющими их линиями (рис. 2). Точки 1, 2, 3, называемые вершинами графа, представляют собой узлы исходной электрической схемы. Линии *a*, *б*, *в*, *г*, *д*, соединяющие вершины графа и называемые ребрами, отражают определенные отношения связи во множестве, представленном вершинами графа. Ребра графа соответствуют ветвям исходной электрической схемы.

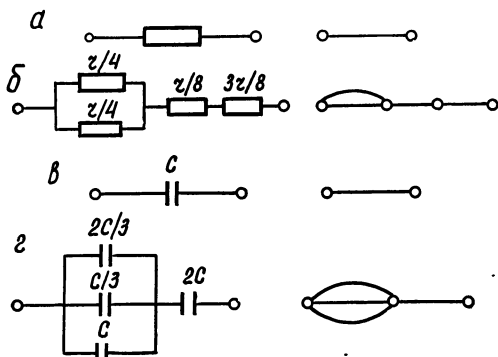


Рис. 3. Представление элементов r и C в виде параллельно-последовательной сети.

Теперь введем понятие о параллельно-последовательных сетях. Сеть называется парал-

лельно-последовательной, если она является параллельным или последовательным соединением двух параллельно-последовательных сетей. При этом один элемент есть параллельно-последова-

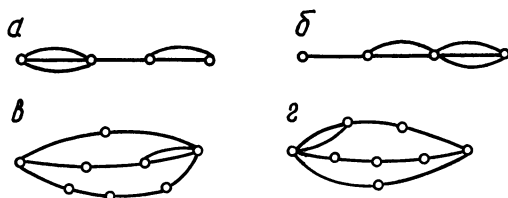


Рис. 4. Неразличимые попарно сети.

тельная сеть. Действительно, любой пассивный элемент r , L , C можно всегда представить в виде параллельно-последовательной сети (рис. 3, б).

На рис. 3, б изображен этот элемент в виде параллельно-последовательной схемы. Справа изображена параллельно-последовательная сеть этой схемы. На рис. 3, в и г то же самое представление сделано для элемента C . Для одного элемента возможна только одна сеть — это сам элемент. Здесь не различаются сети, эквивалентные относительно перестановки их последовательных и па-

параллельных частей, так как с точки зрения свойств цепи порядок их взаимного расположения не существует.

Например, не различаются попарно *a* и *б*, *в* и *г* сети, изображенные на рис. 4. Существенно последовательные сети отличаются

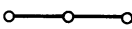


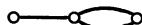

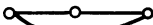
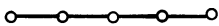





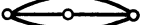



Число элементов	Существенно последовательные	Существенно параллельные	Число сетей
2			2
3	 	 	4
4	    	    	10

Рис. 5. Параллельно-последовательные сети.

от существенно параллельных тем, что у последних входные вершины соединены (как минимум) двумя ребрами.

Для 2, 3 и 4 элементов представлены (рис. 5) все параллельно-последовательные сети, разделенные на классы существенно последовательных и существенно параллельных сетей. Эта классификация выражает двойственность: число существенно последовательных сетей равно числу существенно параллельных и каждая сеть взаимно соответствует своему аналогу. Число сетей быстро растет с увеличением числа элементов. Так, уже при 5 элементах число параллельно-последовательных сетей — 48, при 9—3064, при 20—1026945004 сетей.

Параллельно-последовательные комбинации не исчерпывают всех возможных сетей, так как эти комбинации исключают мостиковые соединения. Если число элементов меньше пяти, все сети являются параллельно-последовательными. Для пяти элементов имеется одна сеть мостикового типа — типа Уитсона (рис. 6, *a*). При возрастании числа элементов число сетей мостикового типа растет быстрее, чем число элементов параллельно-последовательных сетей, так, например, при девяти элементах мостиковые сети составляют около 40 процентов от всех сетей. Для большого числа элементов параллельно-последовательные сети составляют относительно малую часть всех сетей.

Сеть называется параллельно-последовательной (см. рис. 4) с вершинами 1 и 3, если через каждое ребро сети проходит по крайней мере один путь от 1 к 3, не проходящий дважды через одну

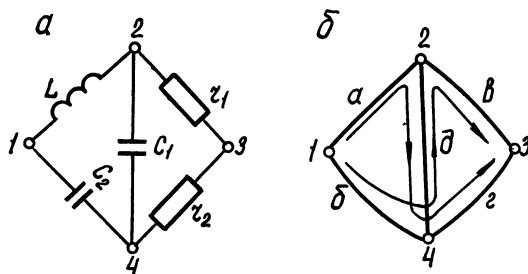


Рис. 6. Мостиковая схема и ее граф.

и ту же вершину, и никакие два пути не проходят через одно и то же ребро в разных направлениях.

На рис. 6, б изображен граф мостовой схемы (или сеть). Из этого рисунка видно, что через ребро д проходят навстречу друг другу два пути от вершины 1 к вершине 3. Поэтому эта сеть отно-

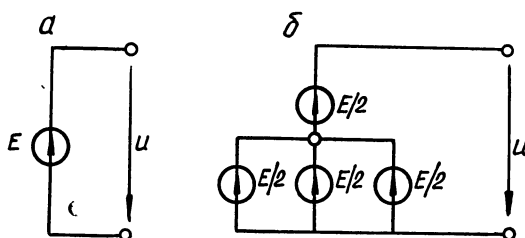


Рис. 7. Представление активного элемента в виде параллельно-последовательного соединения активных элементов.

сится к классу мостовых, а не параллельно-последовательных сетей. Каждый активный элемент можно также представить в виде параллельно-последовательно соединенных элементов (рис. 7, а и б). При таком представлении режим в цепи не изменится.

Сеть будем называть простой, если она относится к классу параллельно-последовательных. Если в состав сети входит хотя бы одно мостовое соединение, то она будет называться сложной.

Замена сложной цепи более простой производится при посредстве ряда расчетных приемов, из которых мы рассмотрим следующие: взаимная замена эквивалентных источников энергии, замена существенно последовательно и существенно параллельно соединенных двухполюсников эквивалентными, преобразование треугольника в эквивалентную звезду и наоборот.

1. Сначала рассмотрим понятие об эквивалентных источниках напряжения и тока. На рис. 8 изображены эквивалентные источники напряжения и тока, посылающие во внешнюю цепь ток \dot{I}_1 и поддерживающие на своих зажимах одинаковое напряжение \dot{U} .

Если записать условие эквивалентности источников в виде

$$\dot{E} = Z\dot{I}, \quad \dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \dot{E}Y, \quad (1)$$

где $Z = Z(p)$ — внутреннее обобщенное комплексное сопротивление источника напряжения, то при замене одного источника другим, токи и напряжения во внешней цепи, с которой эти источники сое-

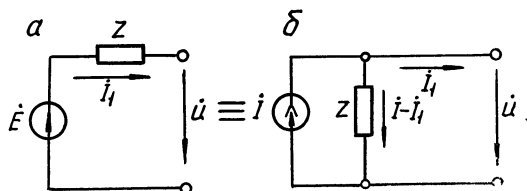


Рис. 8. Эквивалентные источники напряжения и тока.

диняются, остаются неизменными. Действительно, напряжение \dot{U} на зажимах источника напряжения равно разности э. д. с. \dot{E} и падения напряжения от тока \dot{I}_1 в сопротивлении $Z(p)$ (см. рис. 8, а).

Соответственно напряжение \dot{U} на зажимах источника при той же величине тока \dot{I}_1 , посылаемого во внешнюю цепь, равно падению напряжения от тока $\dot{I} - \dot{I}_1$ в сопротивлении Z источника (см. рис. 8, б). В обоих случаях напряжения на зажимах источника одинаковы

$$\dot{U} = \dot{E} - Z\dot{I}_1 = Z(\dot{I} - \dot{I}_1) = Z\dot{I} - Z\dot{I}_1.$$

По условию (1) $Z\dot{I}$ равно \dot{E} для любой нагрузки. Отсюда следует их равенство. При разомкнутой внешней цепи ($\dot{I}_1 = 0$) напряжение на зажимах обоих источников равно \dot{E} .

Важно заметить, что эквивалентность источников понимается только в ранее рассмотренном смысле. По другому критерию эти источники не являются эквивалентными. Так, например, мощности, расходуемые на внутренних сопротивлениях эквивалентных источников напряжения и тока, неодинаковы. В первом случае полная мощность, расходуемая в источнике, равна $Z\dot{I}_1^2$, во втором случае — $Z/\dot{I} - \dot{I}_1^2$. Если цепь разомкнута, то в первом случае мощность в источнике не расходуется, а во втором случае она составляет $Z\dot{I}^2$.

2. Теперь получим формулы, которые позволяют произвести замену последовательно и параллельно соединенных двухполюсников эквивалентными. В дальнейшем под последовательно и параллельно соединенными элементами мы будем понимать

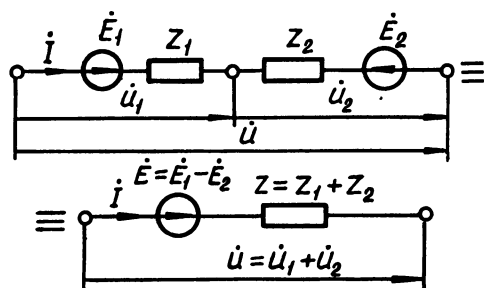


Рис. 9. Замена последовательно соединенных двухполюсников эквивалентным.

существенно последовательные и существенно параллельные соединения. Рассмотрим последовательное соединение двухполюсников (рис. 9).

По второму закону Кирхгофа для исходной схемы имеем

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U}$$

или

$$(Z_1 + Z_2) \dot{I} - \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{U}.$$

Для эквивалентной схемы

$$Z \dot{I} - \dot{E} = \dot{U}.$$

Из этих двух равенств следует, что

$$Z = Z_1 + Z_2 = \sum_{k=1}^2 Z_k,$$

а

$$\dot{E} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 = \sum_{k=1}^2 \dot{E}_k.$$

Если этот результат распространить на n последовательно соединенных двухполюсников, то получим

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k; \quad \dot{E} = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k. \quad (2)$$

Это означает, что при последовательном соединении двухполюсников сопротивление и э. д. с. эквивалентного двухполюсника равны алгебраической сумме сопротивлений и э. д. с. составляющих двухполюсников. Следует отметить, что источники э. д. с.

следует брать с плюсом, если их направления совпадают с выбранным положительным направлением \dot{U} .

Рассмотрим параллельное соединение двухполюсников (рис. 10). В данном случае при нахождении \dot{E} и Z эквивалентного двухполюс-

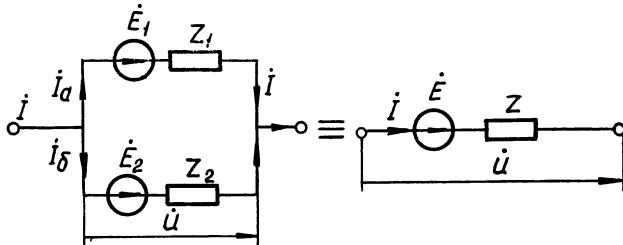


Рис. 10. Замена параллельно соединенных двухполюсников эквивалентным.

ника целесообразно источники э. д. с. заменить на эквивалентные источники тока (рис. 11, а).

По первому закону Кирхгофа для исходной схемы имеем:

$$\dot{I} = \dot{I}_a + \dot{I}_\delta = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + Y_1 \dot{U} + Y_2 \dot{U} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + (Y_1 + Y_2) \dot{U}.$$

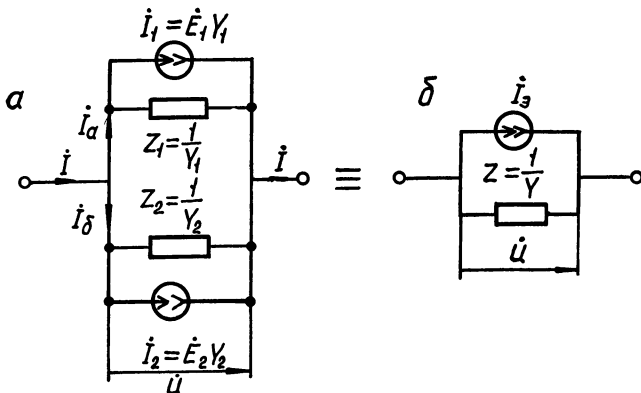


Рис. 11. Схема с источниками тока.

Для эквивалентной схемы

$$\dot{I} = \dot{I}_3 + Y \dot{U}.$$

Из этих двух равенств следует

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \sum_{k=1}^2 \dot{I}_k,$$

а

$$Y = Y_1 + Y_2 = \sum_{k=1}^2 Y_k.$$

Если этот результат распространить на n параллельно соединенных двухполюсников, то получим

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k; \quad (3)$$

$$I_3 = \sum_{k=1}^n I_k.$$

Это означает, что при параллельном соединении двухполюсников их проводимости и токи источников складываются. Следует отметить, что источники тока следует брать с плюсом, если их направления совпадают с выбранным положительным направлением \dot{U} .

Если мы хотим перейти от эквивалентной схемы двухполюсника (рис. 11, б) с источником тока к эквивалентной схеме

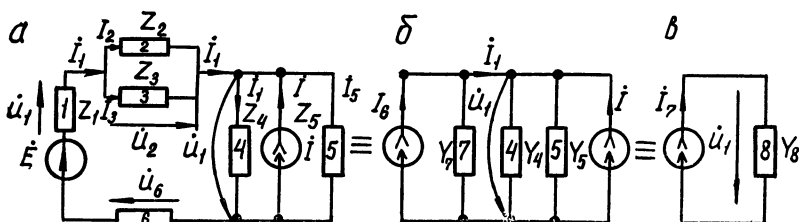


Рис. 12. Упрощение схемы методом преобразования.

(см. рис. 10) с источником напряжения, то надо воспользоваться условием эквивалентности источников (1). Тогда

$$\dot{E} = \dot{I}_3 Z = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k}{Y} = \frac{\sum_{k=1}^n \dot{E}_k Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_k},$$

где

$$Z = \frac{1}{Y}$$

или

$$\frac{1}{Z} = Y = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}.$$

Если в каком-либо параллельно соединенном двухполюснике э. д. с. равна нулю, то слагаемое в числителе этого двухполюсника будет равно нулю.

Пример 1. Требуется рассчитать цепь, изображенную на рис. 12, а методом преобразования схем.

Решение. Заменяя двухполюсники 1, 2, 3 и 6 эквивалентным двухполюсником 7, имеем

$$Z_7 = Z_1 + Z_6 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}; \quad \dot{I}_6 = \frac{\dot{E}}{Z_7}.$$

Полученная схема (рис. 12, б) представляет собой параллельное соединение трех двухполюсников. Заменяя ее эквивалентной схемой 8 (рис. 12, в), находим

$$Y_8 = Y_4 + Y_5 + Y_7; \quad \dot{I}_7 = \dot{I}_6 + \dot{I}.$$

Из последней схемы видно, что

$$\dot{U}_4 = \frac{\dot{I}_7}{Y_8}; \quad I_7 = Y_8 \dot{U}_4.$$

Определив напряжение \dot{U}_4 и пользуясь схемой рис. 12, б, определим токи \dot{I}_4 , \dot{I}_5 , \dot{I}_1 :

$$\dot{I}_4 = Y_4 \dot{U}_4; \quad \dot{I}_5 = Y_5 \dot{U}_4; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5 - \dot{I},$$

теперь можно определить все остальные токи и напряжения исходной схемы. Имеем

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1; \quad \dot{U}_6 = Z_6 \dot{I}_1; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E} - \dot{U}_1 - \dot{U}_6 - \dot{U}_4}{Z_2};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E} - \dot{U}_1 - \dot{U}_4 - \dot{U}_6}{Z_3}.$$

На этом примере хорошо просматриваются все этапы расчета цепей методом их преобразования, а именно: вначале заданная цепь была разделена на подсхемы (первая подсхема включала двухполюсники 1, 2, 3 и 6, вторая подсхема — 4 и 5), затем эти подсхемы были последовательно свернуты. Подсхема 1, 2, 3 и 6 — в элемент 7, а подсхема 4 и 5 совместно с элементом 7 — в элемент 8. В результате этого свертывания заданная цепь приведена к простому виду (рис. 12, в). Расчет такой цепи не представлял никаких трудностей. На третьем этапе после определения \dot{U}_4 для определения всех токов и напряжений в цепи было произведено обратное преобразование цепи и приведение ее к исходному виду.

Пример 2. Требуется произвести расчет цепи с параллельным соединением n ветвей, содержащих источники напряжения (рис. 13, а).

Решение. Вначале заменим все источники напряжения эквивалентными источниками тока. Получим схему рис. 13, б. В этой схеме все источники тока и сопротивления соединены парал-

тельно. Данную схему легко свернуть в схему (рис. 13, в) с одним источником тока \dot{I}_3 с сопротивлением Z_3 и ветвь с сопротивлением Z_{n+1} (нагрузка). Эквивалентные источники тока \dot{I}_3 и сопротивление Z_3 будут определяться формулами (3):

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = Y_1 \dot{E}_1 + Y_2 \dot{E}_2 + \dots + Y_n \dot{E}_n = \sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k;$$

$$\frac{1}{Z_3} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} = Y_3; \quad Y_3 = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

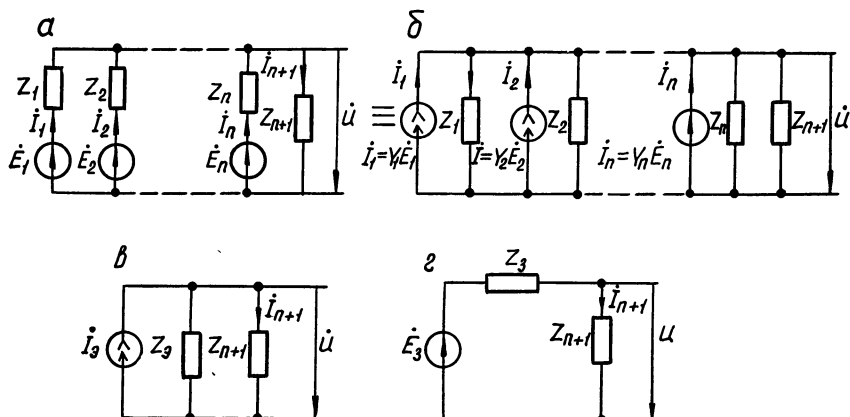


Рис. 13. Преобразования параллельного соединения ветвей с источниками напряжения.

Схему с одним эквивалентным источником тока легко преобразовать в схему с одним эквивалентным источником напряжения (рис. 13, г).

Схема рис. 13, в проста. Исходя из этой схемы, можно легко определить напряжение \dot{U} , которое является узловым напряжением

$$\dot{U} = \frac{\dot{I}_3}{Y_3 + Y_{n+1}} = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \dot{E}_k}{\sum_{k=1}^{n+1} Y_k}.$$

Теперь переходим к третьему этапу расчета. На этом этапе производим обратное преобразование цепи и определяем ток во всех ветвях и напряжения на всех элементах. Ток в $n+1$ ветви равен

$$\dot{I}_{n+1} = Y_{n+1} \dot{U}.$$

Используя закон Ома для каждой ветви, находим ток в n -ветви

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{E}_n - \dot{U}}{Z_n}.$$

Напряжение на сопротивлении Z_n равно

$$\dot{U}_n = Z_n \dot{I}_n.$$

3. Рассмотрим преобразование треугольника в эквивалентную звезду и звезды в эквивалентный треугольник (рис. 14).

При расчете сложных цепей в ряде случаев целесообразно произвести это преобразование.

Для того, чтобы треугольник и звезда были эквивалентными, необходимо, чтобы при одинаковых в обоих случаях напряжениях

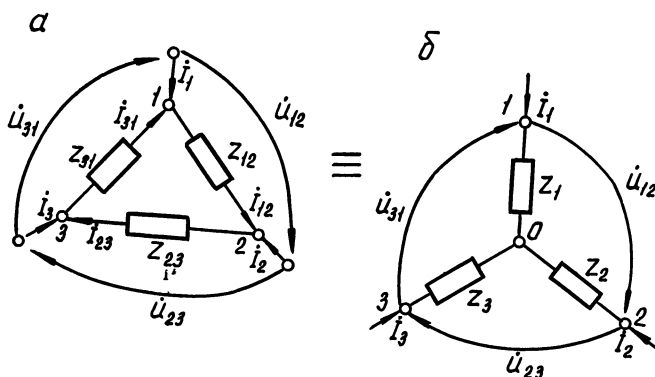


Рис. 14. Соединения треугольником (а) и звездой (б).

\dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} , \dot{U}_{31} между точками 1, 2 и 3 токи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 , подходящие к этим точкам от остальной части цепи, были бы одинаковы в обоих случаях. Это равносильно тому, что мощности в этих цепях одинаковы. Эти соотношения выполняются при любых одинаковых режимах в цепи, а это значит, что при равных напряжениях \dot{U}_{12} , \dot{U}_{23} , \dot{U}_{31} сопротивления между теми же парами вершин в обеих схемах должны быть равны. Отсюда можно записать следующую систему равенств:

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_{31}(Z_{12} + Z_{23})}{D};$$

$$Z_1 + Z_2 = \frac{Z_{12}(Z_{31} + Z_{23})}{D};$$

$$Z_2 + Z_3 = \frac{Z_{23}(Z_{31} + Z_{12})}{D}.$$

где

$$D = Z_{12} + Z_{23} + Z_{31},$$

отсюда находим по правилу Крамера

$$Z_1 = \frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}.$$

Аналогично определяются Z_2 и Z_3 . Таким образом, получим

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{31}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \\ Z_2 &= \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}; \\ Z_3 &= \frac{Z_{23}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражение (4) можно прочесть так: комплексное сопротивление луча звезды равно произведению комплексных сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму комплексных сопротивлений трех сторон треугольника.

Если задано соединение звездой, т. е. Z_1 , Z_2 и Z_3 , и нужно перейти к треугольнику, то для определения системы уравнений относительно неизвестных Z_{12} , Z_{23} и Z_{31} рассмотрим следующие режимы в звезде и треугольнике. Замкнем накоротко вершины 1 и 2 в обеих схемах (рис. 15). Получим для проводимостей

$$Y'_{13} = Y_{31} + Y_{23} = \frac{Y_3(Y_1 + Y_2)}{D_1},$$

где

$$D_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Если замкнуть накоротко вершины 2 и 3, то будем иметь

$$Y'_{21} = Y_{31} + Y_{12} = \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{D_1}.$$

Если замкнуть накоротко вершины 3 и 1, то найдем

$$Y'_{32} = Y_{12} + Y_{23} = \frac{Y_2(Y_1 + Y_3)}{D_1}.$$

Мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными. Отсюда определяем неизвестные Y_{12} , Y_{23} и Y_{31} :

$$\begin{aligned} Y_{12} &= \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \\ Y_{23} &= \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \\ Y_{31} &= \frac{Y_3 Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) можно прочесть следующим образом. Комплексная проводимость стороны треугольника равна произведению ком-

плексных проводимостей прилегающих лучей звезды, деленному на сумму комплексных проводимостей трех лучей звезды.

При эквивалентном преобразовании треугольника в звезду и наоборот возможны случаи, когда это преобразование теряет смысл, что имеет место при равенстве нулю сумм сопротивлений или проводимостей. Возможны и случаи, когда эквивалентное преобразование приводит к появлению отрицательных активных

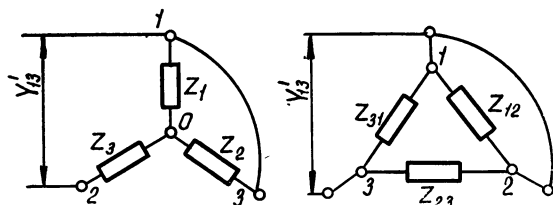


Рис. 15. К нахождению параметров треугольника по заданным параметрам звезды.

сопротивлений в отдельных лучах звезды или сторонах треугольника, означающих невозможность реализации таких схем, при помощи одних r , L , C элементов. На ход расчета последнее обстоятельство не влияет. В окончательном выражении комплексное

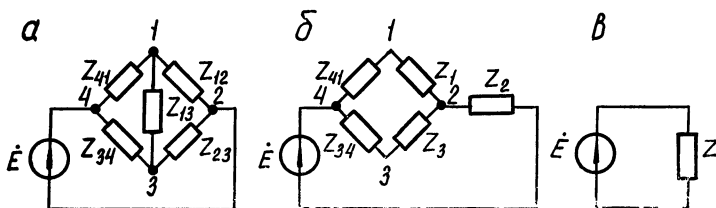


Рис. 16. Упрощение сложной цепи преобразованием треугольника в звезду.

сопротивление всей пассивной цепи содержит положительную вещественную часть.

Упрощение расчета сложной цепи можно проследить на примере расчета цепи рис. 16, а. В этой цепи упрощение достигается преобразованием треугольника Z_{12} , Z_{23} , Z_{13} в эквивалентную звезду Z_1 , Z_2 , Z_3 (рис. 16, б).

После такого преобразования мы получим простую цепь с параллельно-последовательным соединением участков, которая легко свертывается в еще более простую схему (рис. 16, в).

§ 3. Методы определяющих координат

В основе методов определяющих координат или определяющих неизвестных лежит общий принцип возможности выделения из

всех подлежащих определению неизвестных величин подмножества величин, для которых можно составить и решить независимые уравнения. При этом все остальные токи и напряжения в цепи можно выразить через определяющие неизвестные с помощью достаточно простых зависимостей. К указанным методам относятся

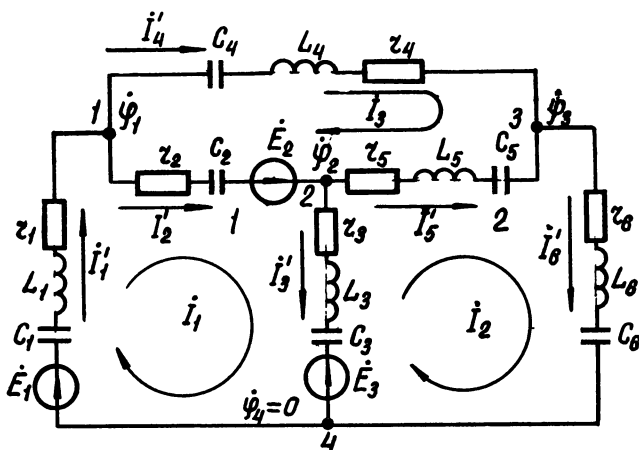


Рис. 17. Схема цепи с тремя независимыми контурами.

методы контурных токов, узловых напряжений и общий метод определяющих координат.

Рассмотрим следующий пример. Требуется рассчитать цепь (рис. 17). Вначале примем, что в цепи отсутствуют источники тока.

Теперь напомним, что задать цепь — это значит задать параметры элементов, структуру и режим цепи. Источники энергии цепь не определяют, а только выявляют ее свойства. Структура цепи определяет взаимосвязь между элементами, режим цепи — начальные условия.

В цепи (см. рис. 17) имеется шесть ветвей, четыре узла и три независимых контура. Рассчитать цепь — это значит определить токи во всех элементах и потенциалы во всех точках цепи. Токи в элементах равны токам в соответствующих этим элементам ветвях. Напряжение на элементах можно определить по токам и тем зависимостям, которые существуют между током и напряжением на элементах. Поэтому, кроме токов в ветвях, необходимо определить потенциалы узлов. Система уравнений цепи для определения этих величин может быть получена на основании первого и второго законов Кирхгофа. Для первой ветви цепи по второму закону Кирхгофа можно записать

$$Z_1 i'_1 + \psi_1 - \psi_4 = E_1.$$

Здесь

$$Z_1 = r_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1}. \quad (6)$$

Подобных уравнений можно составить столько, сколько ветвей содержит цепь. Каждому неизвестному току ветви соответствует свое уравнение. Для шести неизвестных в ветвях будет составлено шесть уравнений. Но неизвестными являются также потенциалы узлов. Поскольку в уравнения входят лишь разности потенциалов, то потенциал одного из узлов может быть выбран произвольно, например, нулевым. За нулевой потенциал принимаем потенциал четвертого узла. Тогда для трех узлов можно составить три уравнения по первому закону Кирхгофа:

$$\text{для первого узла } I'_1 - I'_2 - I'_4 = 0;$$

$$\text{для второго узла } I'_2 - I'_3 - I'_5 = 0; \quad (7)$$

$$\text{для третьего узла } I'_4 + I'_5 - I'_6 = 0.$$

Уравнение для четвертого узла будет являться следствием первых трех, т. е. оно будет зависимым. Следовательно, для определения шести токов в ветвях и трех потенциалов в узлах мы располагаем девятью уравнениями.

Из курса высшей алгебры известно, что система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которых отличен от нуля, обладает решением и притом только одним. Наша система этим условиям удовлетворяет.

Очевидно, полученный результат (см. рис. 17) можно обобщить на любую схему. Пусть электрическая цепь с источниками э. д. с. имеет p ветвей и q узлов. Тогда по второму закону Кирхгофа для токов ветвей и потенциалов узлов можно составить p уравнений, а по первому закону Кирхгофа для токов ветвей можно составить $q - 1$ уравнений, а всего уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа будет $p + q - 1$. В эти уравнения войдут $p + q - 1$ неизвестных: p токов ветвей и $q - 1$ узловых потенциалов. Полученная система $p + q - 1$ линейных уравнений с $p + q - 1$ неизвестными будет иметь единственное решение, если определитель этой системы не будет равен нулю. Такое равенство будет иметь место в цепи, в которой отсутствуют идеальные источники тока. При наличии идеальных источников тока в s ветвях количество уравнений будет меньше общего числа ветвей на эту величину, т. е. в таких ветвях токи заданы независимо от режима в остальной цепи. Таким образом, в общем случае максимальное количество уравнений определяется количеством ветвей p , не содержащих идеальные источники тока, плюс количество независимых узлов $q - 1$.

Рассмотренный метод анализа электрических цепей можно назвать методом токов ветвей и узловых потенциалов, так как конечным результатом анализа является определение токов в ветвях и потенциалов в узлах.

В общем случае применение законов Кирхгофа в сочетании с заданными зависимостями между напряжениями на отдельных элементах и токами в них приводит к системе дифференциальных уравнений. Применение обобщенного комплексного метода позволяет найти частное решение системы дифференциальных уравнений в установившемся режиме при протекании экспоненциальных токов в линейной электрической цепи. При этом дифференциальные уравнения для мгновенных значений искомых токов заменяются алгебраическими уравнениями для обобщенных комплексных токов, напряжений и э. д. с. Применение обобщенного комплексного метода к расчету цепей требует записи в обобщенной комплексной форме всех заданных э. д. с., а также сопротивлений и проводимостей ветвей цепи.

Теперь проследим, как можно сократить общее число уравнений или неизвестных, равное $p+q-1$.

Во-первых, из p уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, можно исключить все узловые потенциалы. В самом деле, из уравнения, составленного для первой ветви, можно исключить $\varphi_1 - \varphi_4$. Из рис. 17 следует, что

$$\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4 = Z_2 \dot{I}'_2 - \dot{E}_2 + Z_3 \dot{I}'_3 + \dot{E}_3,$$

где

$$Z_2 = r_2 + \frac{1}{pC_2}, \quad Z_3 = r_3 + pL + \frac{1}{pC}.$$

Поэтому уравнение переписывается в виде:

$$Z_1 \dot{I}'_1 + Z_2 \dot{I}'_2 + Z_3 \dot{I}'_3 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 - \dot{E}_3.$$

Таких уравнений можно составить шесть, по числу ветвей, но теперь из них независимыми будут только три, по числу независимых контуров. Число независимых контуров обозначим через n . Число независимых уравнений уменьшилось на число исключенных неизвестных потенциалов узлов, т. е. на $q-1$ (три). Таким образом, по второму закону Кирхгофа можно составить только $p - (q-1) = p - q + 1 = n$ уравнений, которые будут содержать p неизвестных. По первому закону Кирхгофа вновь можно составить $q-1$ уравнений для токов ветвей. Таким образом, мы вновь получим число уравнений, равное числу неизвестных. Такая система уравнений запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} Z_1 \dot{I}'_1 + Z_2 \dot{I}'_2 + Z_3 \dot{I}'_3 &= \dot{E}_1 + \dot{E}_2 - \dot{E}_3, \\ -Z_3 \dot{I}'_3 + Z_5 \dot{I}'_5 + Z_6 \dot{I}'_6 &= \dot{E}_3, \end{aligned}$$

$$-Z_2\dot{I}'_2 + Z_4\dot{I}'_4 - Z_5\dot{I}'_5 = -\dot{E}_2.$$

$n = p - q + 1$ уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа.

$$\dot{I}'_1 - \dot{I}'_2 - \dot{I}'_4 = 0,$$

$$\dot{I}'_2 - \dot{I}'_3 - \dot{I}'_5 = 0,$$

$$\dot{I}'_4 + \dot{I}'_5 - \dot{I}'_6 = 0.$$

$q - 1$ уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа.

Описанный метод называется методом уравнений Кирхгофа, или методом токов ветвей (элементов). Таким образом, метод анализа цепи, в котором неизвестными, подлежащими определению, являются токи в ветвях цепи, называется методом токов ветвей.

После определения токов ветвей напряжения на элементах и потенциалы в узлах определяются по закону Ома. Поэтому при применении метода Кирхгофа приходится составлять и решать три группы уравнений: уравнения по первому закону Кирхгофа для $q - 1$ узлов, уравнения по второму закону Кирхгофа для $n = p - q + 1$ замкнутых контуров и уравнения по закону Ома для каждого элемента цепи. Порядок расчета цепи данным методом:

1. На схеме цепи выбираются положительные направления токов в ветвях и напряжений на ее элементах.
2. Составляются $q - 1$ узловых уравнений для токов.
3. Составляются $n = p - q + 1$ независимых контурных уравнений.

Для составления контурных уравнений выбирается произвольное направление обхода контура. Целесообразно направления обхода во всех контурах выбрать одинаковыми. Если при обходе контура условно выбранное направление его обхода совпадает с током ветви, то падение напряжения берется на этой ветви со знаком плюс, а в противном случае — со знаком минус. Все источники э. д. с. записываются с правой стороны уравнений. Они берутся со знаком плюс, если направление обхода совпадает с направлением источника, и со знаком минус в противном случае.

4. Полученная система из $p = n + q - 1$ независимых уравнений решается относительно неизвестных величин.

5. Напряжение на элементах и узловые потенциалы выражаются через найденные токи при помощи закона Ома.

Однако описанный способ уменьшения числа уравнений и неизвестных не является единственным.

В самом деле, из уравнений, составленных для токов ветвей, мы можем найти все токи $\dot{I}'_1, \dot{I}'_2, \dot{I}'_3$ и т. д., выразив их через узловые потенциалы и источники э. д. с. Найденные таким образом токи можно подставить в систему узловых уравнений (7) и полу-

чить систему из $q - 1$ уравнений для узловых потенциалов. В эти уравнения токи входить не будут.

Рассмотрим этот способ расчета на конкретном примере. Возьмем уравнение для первого узла:

$$\dot{I}'_1 - \dot{I}'_2 - \dot{I}'_4 = 0,$$

исключим из него все токи ветвей. Из уравнения (7) найдем

$$\dot{I}'_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{\Phi}_1}{Z_1}, \quad \dot{\Phi}_4 = 0.$$

Ток \dot{I}'_2 найдем из уравнения

$$Z_2 \dot{I}'_2 + \dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1 = \dot{E}_2,$$

откуда получим

$$\dot{I}'_2 = \frac{\dot{E}_2 - (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1)}{Z_2}.$$

Ток \dot{I}'_4 найдем из уравнения

$$Z_4 \dot{I}'_4 + \dot{\Phi}_3 - \dot{\Phi}_1 = 0,$$

откуда получим

$$\dot{I}'_4 = - \frac{\dot{\Phi}_3 - \dot{\Phi}_1}{Z_4}.$$

Если найденные токи подставить в узловое уравнение, то получим

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} \right) \dot{\Phi}_1 - \frac{\dot{\Phi}_2}{Z_2} - \frac{\dot{\Phi}_3}{Z_4} = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} - \frac{\dot{E}_2}{Z_2}, \quad (8)$$

или, вводя обобщенные комплексные проводимости ветвей, будем иметь

$$(Y_1 + Y_2 + Y_4) \dot{\Phi}_1 - Y_2 \dot{\Phi}_2 - Y_4 \dot{\Phi}_3 = Y_1 \dot{E}_1 - Y_2 \dot{E}_2. \quad (9)$$

В этом уравнении неизвестными являются узловые потенциалы.

Для второго и третьего узлового уравнения (8) аналогично находим:

$$(Y_2 + Y_3 + Y_5) \dot{\Phi}_2 - Y_1 \dot{\Phi}_1 - Y_5 \dot{\Phi}_3 = Y_2 \dot{E}_2 + Y_5 \dot{E}_3;$$

$$(Y_4 + Y_5 + Y_6) \dot{\Phi}_3 - Y_4 \dot{\Phi}_1 - Y_5 \dot{\Phi}_2 = 0.$$

Таким образом, мы получим $q - 1$ уравнений по числу независимых узлов.

После определения независимых переменных $\dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_2, \dot{\Phi}_3$ токи во всех ветвях и элементах определяются при помощи закона Ома. Метод анализа электрической цепи, в которой неизвестными, под-

лежащими определению, являются потенциалы независимых узлов, называется методом узловых потенциалов.

Узловые потенциалы можно назвать определяющими координатами или определяющими неизвестными. Введение узловых потенциалов позволило нам уменьшить число уравнений с $p = n + q - 1$ до $q - 1$ или иначе $q - 1 = p - n$. Таким образом, число узловых уравнений меньше числа ветвей на число независимых контуров. Это значит, что при заданном числе ветвей метод узловых потенциалов приводит к тем меньшему числу уравнений, чем больше контуров.

Уменьшить число уравнений по сравнению с числом ветвей можно не только путем исключения токов ветвей. Эту задачу можно также решить путем введения понятия о контурных токах. Контурные токи представляют собой систему независимых токов в контурных цепях. Контурные токи в отличие от узловых потенциалов не обязательно должны быть реальными: они могут просто являться некоторыми расчетными токами. На рис. 17 независимые контуры обозначены 1, 2, 3, а контурные токи i_1, i_2, i_3 . Поэтому под контурным током будем понимать круговой ток в независимом контуре. Направление контурного тока выбирается произвольно. Однако целесообразно во всех контурах направления контурных токов выбирать одинаковыми, скажем, везде по часовой стрелке. Легко понять, что через введенные таким образом контурные токи токи во всех ветвях будут определяться однозначно. При этом ток в любом элементе цепи, через который проходит ток лишь одного контура, будет равен по величине и направлению контурному току. Если же через элемент проходят токи нескольких контуров, то ток в элементе определяется как алгебраическая сумма контурных токов в этом элементе. Например, во второй ветви схемы рис. 17 действительный ток ветви и контурные токи связаны следующим соотношением:

$$i'_2 = i_1 - i_3.$$

Уравнения, составленные для контурных токов по второму закону Кирхгофа, называются контурными уравнениями. Число контурных уравнений равно числу независимых контуров, т. е. $n = p - q + 1$. Таким образом, число контурных уравнений меньше числа уравнений токов ветвей на $q - 1$. Это объясняется тем, что введение контурных токов привело к автоматическому удовлетворению постоянства зарядов в узлах, поскольку в каждом из контуров один и тот же ток проходит через узел, т. е. втекает и вытекает из него.

Метод анализа электрических цепей, в котором неизвестными, подлежащими определению, являются контурные токи независимых контуров, называется методом контурных токов.

Контурные токи можно назвать определяющими координатами

или определяющими неизвестными. Введение контурных токов позволило нам уменьшить число уравнений с $p = n + q - 1$ до n , где $n = p - q + 1$. Это значит, что число контурных уравнений меньше числа ветвей на число независимых узлов.

Так как число узловых уравнений равно $q - 1$, а число контурных уравнений $n = p - q + 1$, то при их равенстве должно удовлетворяться следующее соотношение:

$$p - q + 1 = q - 1$$

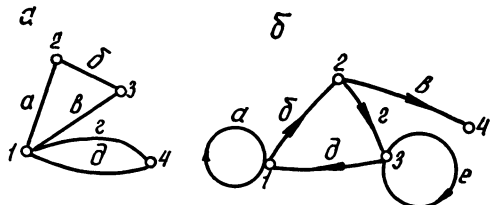


Рис. 18. Ненаправленный (а) и направленный (б) графы.

или

$$p = 2(q - 1).$$

Если число независимых контуров n больше числа независимых узлов, то число контурных уравнений будет больше числа узловых. Если $n < q - 1$, то соотношение между уравнениями будет обратным. Вопрос о целесообразности применения того или иного метода по критерию минимума числа уравнений однозначно не решается.

Задача определения необходимого общего количества независимых уравнений относительно просто решается введением топологических понятий: дерева, графа, хорды и сечения графа.

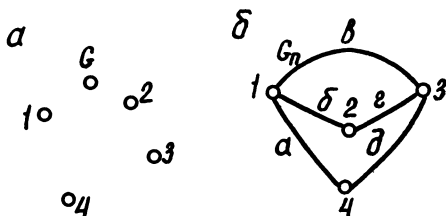


Рис. 19. Нуль-граф (а) и полный граф (б).

Для введения новых понятий о графах рассмотрим рис. 18. Граф называется направленным или линейным, а также графом сигнала, если на линиях графа указаны направления передачи сигнала от одной вершины к другой. Ориентированные ребра такого графа называются дугами.

Граф G_0 , состоящий из изолированных вершин, не соединенных ребрами, называют нуль-графом (рис. 19, а). Нуль-граф выражает некоторую совокупность элементов множества $1, 2, 3, \dots$, рассматриваемую вне связи элементов друг с другом. Нуль-граф не содержит информацию о том, как связаны между собой элементы множества, представленные им. Граф G_n , в котором любые две вершины связаны ребром или дугой, называется полным графом (рис. 19, б).

Граф G' , содержащийся в графе G , будем называть подграфом. На рис. 20, а показан граф G , а на рис. 20, б, в, г подграфы G'_1 , G'_2 , G'_3 . Подграфы показаны сплошными линиями. Подграф G' содержит в общем случае лишь часть вершин и ребер (дуг), входя-

щих в граф G , однако не может содержать вершины или ребра (дуги), не имеющиеся в G .

Граф, состоящий из вершин и ребер (дуг), которыми исходный граф G отличается от подграфа G' , называется дополнением S подграфа G' . Дополнения на рис. 20, б, в, г показаны пунктиром.

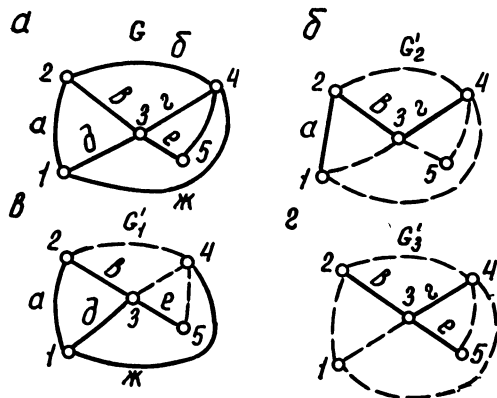


Рис. 20. Граф (а), подграфы и дополнения (б, в, г).

Подграф G' и его дополнение S , взятые вместе, всегда образуют исходный граф G .

Один и тот же граф может быть изображен различными способами. Два графа называются изоморфными (рис. 21), если они имеют одинаковое число вершин и если каждой паре вершин, соединенных ребром в одном графе, соответствует такая же пара вершин, соединенных ребром в другом графе.

Обязательным условием изоморфности ориентированных графов является одинаковая ориентация всех дуг.

Под элементом графа будем понимать ребро (дугу) с двумя относящимися к нему вершинами, называемыми граничными. Число элементов равно числу дуг.

В неориентированном графе последовательность ребер, в которой у каждого ребра одна из граничных вершин является также граничной вершиной предыдущего ребра, а другая — граничной вершиной последующего, называется цепью. Замкнутая цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в одной и той же вершине, называется циклом. Цикл, при обходе которого ни одна из вершин не встречается дважды, называется элементарным циклом.

Последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом последующей, в ориентированном графе называется путем. Замкнутый путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной, называется контуром. Если все вершины контура, за исключением начальной и конечной, различны,

он называется элементарным. Контур, образованный одной дугой (на рис. 18, b дугой a или дугой e), называется петлей.

Граф, любые две вершины которого можно соединить цепью, называется связным графом. Если граф имеет вершины, которые нельзя соединить цепью со всеми остальными вершинами, такой граф называется несвязным.

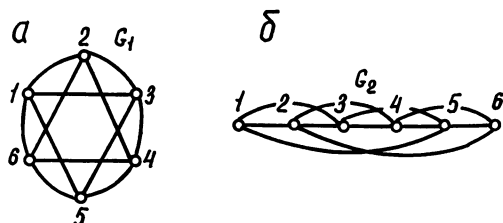


Рис. 21. Граф G_1 (а) и изоморфный ему граф G_2 (б).

На рис. 22 показан несвязный граф, состоящий из трех связных компонентов.

Деревом связного графа G называется связный подграф T , содержащий все вершины графа G , но не имеющий циклов (контуров).

Ребра (дуги) графа, входящие в дерево, называются ветвями дерева. Ребра (дуги), входящие в дополнение дерева, называются

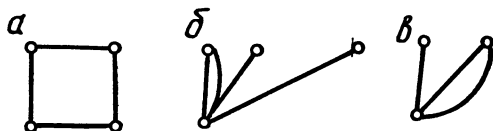


Рис. 22. Несвязный граф.

хордами. На рис. 23 изображен граф G , сплошными линиями показаны три возможных дерева этого графа T_1 , T_2 , T_3 .

Дополнения деревьев (хорды) показаны на соответствующих рисунках пунктирными линиями.

Несвязный граф имеет несколько деревьев — по числу связных компонентов. Совокупность деревьев несвязного графа называют лесом графа. На рис. 22 лес графа выделен жирными линиями.

Теперь применим эти понятия о графах для определения числа независимых контурных и узловых уравнений. Для этого число вершин графа будем обозначать через q , число ребер — p , а число циклов — n . При этом каждой вершине графа соответствует узел цепи, ребру — ветвь, а циклу — контур.

Докажем следующую теорему о графах. Если дерево имеет q_T вершин, то число ветвей p_T определяется соотношением

$$p_T = q_T - 1. \quad (10)$$

Эта теорема, очевидно, справедлива, если дерево состоит из одной ветви и имеет две вершины. Добавление еще одной связной ветви увеличит p_T и q_T на единицу, т. е. не нарушит соотношения (10). Это соотношение не нарушается, пока конфигурация с добавленными ветвями остается деревом. Из этой теоремы вытекает

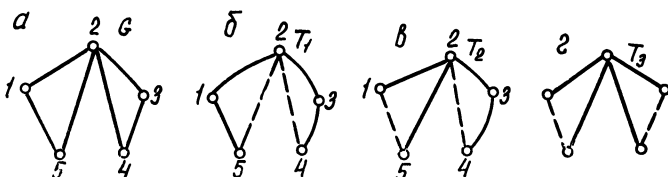


Рис. 23. Граф (а) при варианте дерева (б, в, г).

следствие: число хорд, входящих в дополнение дерева, равно числу ветвей графа минус число ветвей дерева

$$p_{ST} = p - p_T = p - q + 1, \quad (11)$$

но это число равно числу независимых контуров n .

Число хорд называется иногда цикломатическим числом, числом Бетти или дефицитом графа. Это число указывает, сколько ребер графа должно быть удалено, чтобы превратить его в дерево. Но количество хорд (дефицит графа) определяет число отличающихся один от другого контуров графа. Действительно, добавление к дереву одной хорды образует один контур, причем все образованные таким способом контуры будут различными, так как в каждый из них будет входить, по крайней мере, по одному элементу, присущему лишь данному контуру. Очевидно, дефицит дерева равен нулю. Таким образом можно сделать следующий вывод. Число независимых контуров в любой цепи равняется дефициту графа или числу Бетти, то есть числу ветвей, которые дополняют дерево графа. Независимые контуры иногда называют фундаментальными. Следовательно, контур называется фундаментальным, если в него входит только одна хорда. Выбранное дерево графа однозначно определяет номера элементов, входящих в каждый фундаментальный контур.

В качестве примера рассмотрим цепь (рис. 24, а), определим для нее число независимых контуров.

Для этого изобразим граф этой цепи (рис. 24, б). При изображении графа источники э. д. с. замыкаются накоротко, а источник тока размыкается. Теперь в полученном графе подсчитаем число хорд. Для этого удалим такое количество ветвей, которое допол-

няет граф до дерева. На рис. 24 *в*, изображено одно из возможных деревьев графа. На этом рисунке хорды показаны пунктирной линией. Всего хорд в цепи четыре. Следовательно, число независимых контуров будет четыре, $n=4$. Для этой цепи $p=14$, $q=11$. Отсюда следует справедливость равенства

$$n = p - q + 1 = 14 - 11 + 1 = 4.$$

Теперь перейдем к введению понятия о сечении графа и покажем, что число независимых узловых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, равно числу сечений графа.

Вершины любого связного графа можно разделить на две группы. Линия, осуществляющая такое разделение, пересекает элемен-

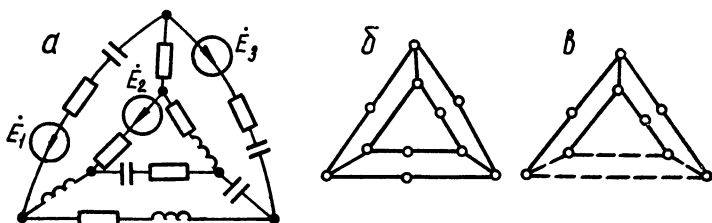


Рис. 24. Цепь (*а*), граф (*б*), дерево графа (*в*). Пунктиром указаны хорды.

ты, вершины которых принадлежат различным группам. Эта линия порождает новое множество элементов, которое будем называть отделенным. Отделенное множество, в которое входит только одна ветвь дерева, называется сечением. Число сечений равно

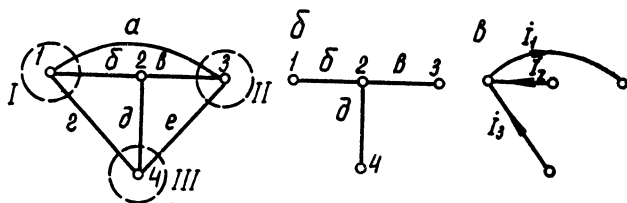


Рис. 25. Граф (*а*), дерево графа (*б*), отсечение (*в*) и линии, образующие отсечения (пунктирные).

числу ветвей дерева, определяемому выражением (10). Выбранное дерево однозначно определяет номера элементов, входящих в каждое сечение. Если для графа на рис. 25, *а* выбрать дерево (рис. 25, *б*), то сечения образуются в результате проведения показанных на рис. 25, *а* пунктирных линий. Они обозначены римскими цифрами. Для графа в сечения войдут следующие элементы: сечение I — ветвь б, хорды а, г; сечение II — ветвь в, хорды а, е; сечение III — ветвь д, хорды г, е.

Если выбрать другое дерево графа, то можно получить другие сечения. Число возможных вариантов сечений определяется числом деревьев, которое можно выделить в данном графе. После введения этих понятий покажем, что число независимых узловых уравнений равно множеству сечений.

По первому закону Кирхгофа алгебраическая сумма токов, протекающих через замкнутую поверхность, равна нулю. Так как всегда можно найти замкнутую поверхность, которая пересекает все ветви и хорды сечения и не пересекает никаких других ветвей, то этому закону можно дать другую формулировку: алгебраическая сумма токов сечения равна нулю. Например, уравнение сечения \dot{I} (рис. 25, в) имеет вид

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0.$$

Подобных уравнений можно составить столько, сколько имеется сечений. Так как в каждое сечение обязательно входит одна новая ветвь дерева, то все эти уравнения будут независимыми. Отсюда мы делаем окончательный вывод: число независимых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, равно числу ветвей дерева.

Метод контурных токов. Рассмотрим цепь с двумя независимыми контурами (рис. 26). В этой цепи заданными являются источники э. д. с. и параметры цепи Z_1 , Z_2 и Z_3 . Требуется определить токи во всех элементах и напряжения на них. При анализе цепей методом контурных токов расчет ведут в следующем порядке.

1. Определяют число независимых контуров. Число независимых контуров равно числу хорд графа (дефициту графа).

2. Выбирают один из возможных вариантов независимых контуров. Каждому независимому контуру присваивают свой контурный ток. Положительные направления контурных токов выбирают произвольно. Целесообразно все контурные токи направлять одинаково (например, по часовой стрелке).

3. По второму закону Кирхгофа записывают контурные уравнения по числу независимых контуров. Для заданной двухконтурной схемы могут быть записаны два уравнения

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_3) \dot{I}_1 - Z_3 \dot{I}_2 &= \dot{E}_1; \\ -Z_3 \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2 &= -\dot{E}_2. \end{aligned}$$

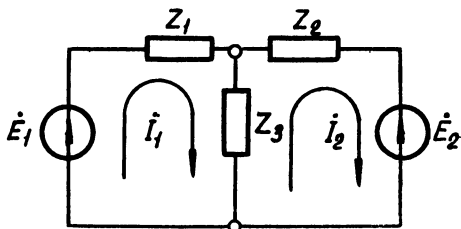


Рис. 26. Двухконтурная цепь.

токи \dot{I}_k и \dot{I}_m направлены в них встречно.

Решая систему уравнений (12) по правилу Крамера для контурных токов, найдем

$$I_1 = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} E_{11}Z_{12} \dots Z_{1n} \\ E_{22}Z_{22} \dots Z_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ E_{nn}Z_{n2} \dots Z_{nn} \end{vmatrix}$$

и т.д., где Δ_z — главный определитель системы

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

Главный определитель снабжен индексом Z , так как его элементами являются комплексные сопротивления.

Если определитель разложить по элементам столбца, в который входят задающие э. д. с, то получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} \dot{E}_{11} + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \dot{E}_{22} + \cdots + \frac{\Delta_{n1}}{\Delta_Z} \dot{E}_{nn}; \\ I_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} \dot{E}_{11} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \dot{E}_{22} + \cdots + \frac{\Delta_{n2}}{\Delta_Z} \dot{E}_{nn}; \\ &\vdots \\ I_n &= \frac{\Delta_{n1}}{\Delta_Z} \dot{E}_{11} + \frac{\Delta_{n2}}{\Delta_Z} \dot{E}_{22} + \cdots + \frac{\Delta_{nn}}{\Delta_Z} \dot{E}_{nn}, \end{aligned} \quad (13)$$

где Δ_{km} — алгебраическое дополнение элемента Z_{km} определителя Δ_Z системы,

$$\Delta_{km} = (-1)^{k+m} M_{km}.$$

Алгебраическое дополнение элемента Z_{km} равно минору этого элемента, умноженному на $(-1)^{k+m}$. Минор M_{km} образуется из определителя системы вычеркиванием из него k -ой строки и m -го столбца.

Сокращенно система уравнений (13) запишется в виде

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta_Z} \sum_{i=1}^n \dot{E}_{ii} \Delta_{ik}. \quad (14)$$

Первый индекс алгебраического дополнения i , обозначающий номер строки, вычеркиваемой в определителе системы, соответствует номеру контура, контурная э. д. с. которого умножается на данное алгебраическое дополнение. Второй индекс k , обозначающий номер столбца, вычеркиваемого в определителе Δ_z системы,

соответствует номеру контура, для которого вычисляется контурный ток.

Важно заметить, что для линейных цепей без зависимых источников энергии $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$. Это вытекает из того, что Δ_{km} получается из Δ_z путем вычеркивания k -й строки и m -го столбца, а Δ_{mk} — путем вычеркивания m -й строки и k -го столбца. При отсутствии зависимых источников энергии $Z_{km} = Z_{mk}$. Поэтому в результате вычеркивания получается два определителя, в которых элементы строк одного равны элементам соответствующих столбцов другого. Такие определители равны друг другу, откуда и следует равенство $\Delta_{km} = \Delta_{mk}$. При наличии зависимых источников энергии (трансисторы, электронные лампы) $Z_{km} \neq Z_{mk}$.

Удобным способом представления линейных уравнений (12) является матричная форма:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ \hline Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \dot{I}_1 \\ \hline \dot{I}_2 \\ \hline \dots \\ \hline \dot{I}_n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \dot{E}_{11} \\ \hline \dot{E}_{22} \\ \hline \dots \\ \hline \dot{E}_{nn} \\ \hline \end{array}$$

В правой части матричного равенства стоит матрица-столбец, n элементами которой являются задающие э. д. с. Назовем ее матрицей задающих э. д. с., или задающим вектором. Левая часть равенства представляет собой произведение квадратной матрицы n -го порядка, составленной из коэффициентов уравнений (12) и матрицы-столбца, n элементов которой являются контурными токами. Назовем ее матрицей контурных токов или искомым вектором. Элементы квадратной матрицы — это собственные и общие сопротивления контуров, в соответствии с чем назовем ее матрицей сопротивлений.

Если обозначить каждую из матрично-векторных величин одной буквой, а именно:

$$\dot{E} = \|\dot{E}\| = \begin{array}{|c|} \hline \dot{E}_{11} \\ \hline \dot{E}_{22} \\ \hline \dots \\ \hline \dot{E}_{nn} \\ \hline \end{array}, \quad Z = \|Z\| = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ \hline Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \\ \hline \end{array}, \quad \dot{I} = \|\dot{I}\| = \begin{array}{|c|} \hline \dot{I}_1 \\ \hline \dot{I}_2 \\ \hline \dots \\ \hline \dot{I}_n \\ \hline \end{array}$$

то матричное равенство запишется в виде

$$Z\dot{I} = \dot{E} \quad \text{или} \quad \|Z\| \cdot \|\dot{I}\| = \|\dot{E}\|. \quad (15)$$

Матрицы $\|\dot{E}\|$ и $\|Z\|$ полностью определяют электрическое состояние схемы в принужденном режиме при экспоненциальном воздействии, в связи с чем их можно назвать матрично-векторными параметрами схемы.

Если матрично-векторные параметры схемы $\|\dot{E}\|$ и $\|Z\|$ известны, то контурные токи определяются решением матричного равенства относительно искомого вектора

$$\dot{I} = Z^{-1}\dot{E} \text{ или } \|\dot{I}\| = \|Z\|^{-1} \cdot \|\dot{E}\|. \quad (16)$$

Таким образом, вычисления сводятся к определению матрицы $\|Z\|^{-1}$, обратной матрице сопротивлений, и последующему умножению ее на задающий вектор $\|\dot{E}\|$.

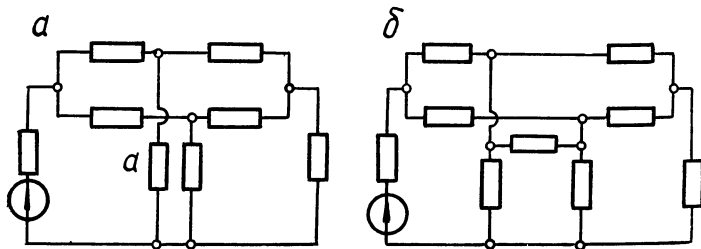


Рис. 27. Плоские электрические цепи.

Сделаем несколько замечаний о применении метода контурных токов.

1. Контурные уравнения (12) записаны в предположении, что источниками энергии служат источники э. д. с. При наличии в электрической схеме источников тока они могут быть заменены эквивалентными источниками э. д. с. Однако такая замена не является обязательной. Если в цепи имеется источник тока, то целесообразно один из контуров выбрать так, чтобы ветвь с источником тока входила только в этот контур; тогда число неизвестных контурных токов сократится на число заданных токов. В этом случае заданные токи запишутся с правой стороны уравнений как известные величины.

2. Электрические цепи могут быть плоскими или неплоскими. Плоская, или планарная, цепь может быть вычерчена на плоскости или на сфере в виде схемы с непересекающимися ветвями.

Неплоская, или непланарная, цепь не может быть вычерчена на плоскости в виде схемы с непересекающимися ветвями. Примерами плоских схем могут служить схемы, показанные на рис. 27, а, б. Пересечения ветвей на этих схемах можно избежать при другом способе их изображения. Например, в схеме рис. 27, а достаточно ветвь а начертить с левой стороны источника. Предлагаем читателю самостоятельно сначала устранить пересечение ветвей

в схеме рис. 27, б, а затем добавить недостающую ветвь, чтобы сделать эту цепь неплоской. Если схема плоская, то в качестве системы независимых контуров всегда можно выбрать «ячейки» или «окна» схемы, как это сделано, например, на рис. 26. Благодаря этому при одинаковом направлении контурных токов во всех независимых контурах в общих ветвях контурные токи будут направлены встречно, а общие сопротивления в контурные уравнения войдут со знаком минус. При этом любая

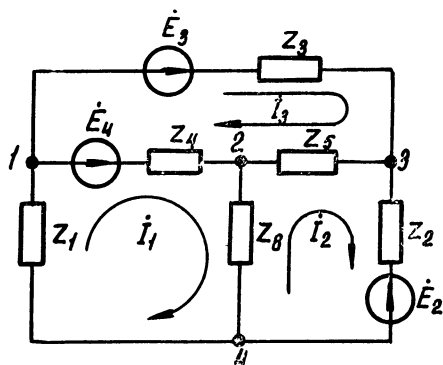


Рис. 28. К составлению контурных уравнений.

ветвь контура будет входить либо в один, либо в два независимых контура. Если цепь неплоская, то не представляется возможным выполнить эти условия. Неплоские схемы обычно удобно анализировать методом узловых напряжений.

3. Преимуществами метода контурных токов являются: а) уменьшение количества уравнений по сравнению с методом токов ветвей; б) достижение некоторого автоматизма в записи системы уравнений. Приведенная система уравнений (12) записана без

рассмотрения конкретных контуров цепи — выяснено лишь количество независимых контуров; в) контурные уравнения удобны для доказательств ряда теорем и обоснований методов анализа в линейных электрических цепях.

Очень удобна матричная форма записи и исследования контурных уравнений. Матричная алгебра не дает сокращения числовых вычислений, но она дает возможность записать алгебраические уравнения, образующие системы совместных уравнений в очень компактной и удобной форме. Благодаря этому достигается большая наглядность и упрощаются алгебраические преобразования.

Пример 3. Составить контурные уравнения и определить матрицу сопротивлений и задающий вектор (матрицу-столбец задающих э. д. с.) цепи рис. 28.

Решение 1. Выберем независимые контуры и положительные направления контурных токов в них согласно рис. 28.

2. Составим контурные уравнения. Они имеют вид

$$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 = \dot{E}_{11};$$

$$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 = \dot{E}_{22};$$

$$Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 = \dot{E}_{33}.$$

3. Составим матрицу сопротивлений. Для записи матрицы сопротивлений составим прямоугольную таблицу с тремя клетками по длине и ширине. В клетки, расположенные на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами, вписываем значения собственных сопротивлений Z_{kk} , а в клетки, расположенные на пересечении строк и столбцов с разными номерами — значения общих сопротивлений. В результате получим

$$\|Z\| = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_1+Z_4+Z_6 & -Z_6 & -Z_4 \\ \hline -Z_6 & Z_2+Z_5+Z_6 & -Z_5 \\ \hline -Z_4 & -Z_5 & Z_3+Z_4+Z_5 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Матрица сопротивлений несет полную информацию о собственных и общих сопротивлениях цепи. Так, например, $Z_{22} = Z_2 + Z_5 + Z_6$, а $Z_{23} = -Z_5$.

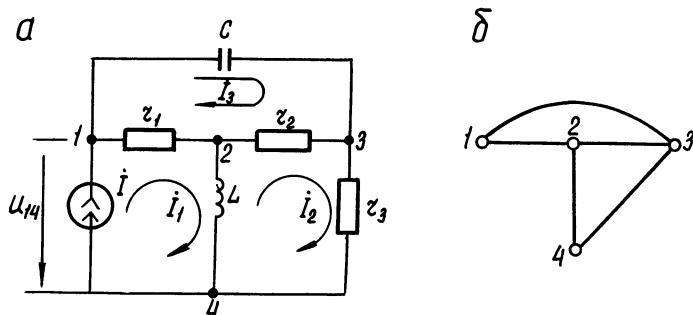


Рис. 29. Цепь с источником тока (а) и ее граф (б).

4. Составим матрицу-столбец задающих э. д. с. Задающий вектор образуется из элементов, представляющих собой алгебраические суммы э. д. с., действующих в соответствующих контурах

$$\|\dot{E}\| = \begin{array}{|c|} \hline E_4 \\ \hline -\dot{E}_2 \\ \hline \dot{E}_3 - \dot{E}_4 \\ \hline \end{array}$$

Пример 4. Составить контурные уравнения для цепи (рис. 29).

Решение. Как видно из графа рис. 29, б, цепь имеет два независимых контура, реальная цепь имеет три контура. Но в связи с тем, что в одном из контуров включен источник тока \dot{i} , эти три контура не являются независимыми. Можно было бы преобразовать источник тока в источник э. д. с. Однако источник тока

задан с параллельной проводимостью, равной нулю, и мы пока не знаем способа, дающего возможность такого преобразования. Поэтому будем составлять уравнения для всех трех контуров схемы. При этом примем первый контурный ток, равный току источника $\dot{I}_1 = \dot{I}$, а напряжение на источнике тока обозначим через \dot{U}_{14} . Тогда будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{aligned}(r_1 + pL) \dot{I}_1 - pL \dot{I}_2 - r_1 \dot{I}_3 - \dot{U}_{14} &= 0; \\ -pL \dot{I}_1 + (r_2 + r_3 + pL) \dot{I}_2 - r_2 \dot{I}_3 &= 0; \\ -r_1 \dot{I}_1 - r_2 \dot{I}_2 + \left(r_1 + r_2 + \frac{1}{pC}\right) \dot{I}_3 &= 0\end{aligned}$$

Неизвестное \dot{U}_{14} встречается только в первом уравнении. Поэтому мы можем решать сначала два последних уравнения, в кото-

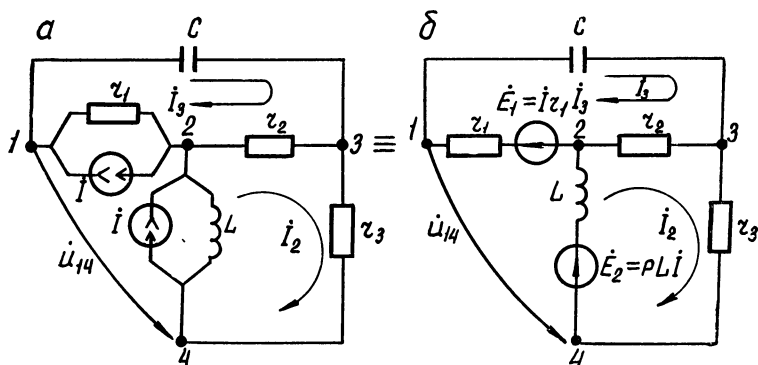


Рис. 30. Преобразование цепи с источниками тока (а) в цепь с источниками э. д. с. (б).

рые входят только два неизвестных. После переноса неизвестных величин в правую часть получаем

$$\begin{aligned}(r_2 + r_3 + pL) \dot{I}_2 - r_2 \dot{I}_3 &= pL \dot{I}_1; \\ -r_2 \dot{I}_2 + \left(r_1 + r_2 + \frac{1}{pC}\right) \dot{I}_3 &= r_1 \dot{I}_1.\end{aligned}$$

Мы получили два контурных уравнения в соответствии с графом рис. 29, б.

Теперь составим уравнения, первоначально преобразуя источник тока в источник э. д. с. Так как параллельная проводимость идеального источника тока равна нулю, то применим специальный прием внесения источника тока в контур. При применении этого приема необходимо выбрать контур, образованный источником тока и некоторой совокупностью других ветвей схемы. Тогда дей-

ствие источника тока \dot{I} эквивалентно действию таких источников, присоединенных параллельно каждой ветви, входящей в этот контур. На рис. 30 показан возможный вариант такого преобразования. После этого переход от источника тока к источникам э. д. с. осуществляем обычным путем.

Если теперь составить контурные уравнения в соответствии с рис. 30, б, то получим

$$\begin{aligned}(r_2 + r_3 + pL) \dot{I}_2 - r_2 \dot{I}_3 &= pL \dot{I}; \\ -r_2 \dot{I}_2 + \left(r_1 + r_2 + \frac{1}{pC}\right) \dot{I}_3 &= r_1 \dot{I}.\end{aligned}$$

Эти уравнения полностью совпадают с ранее полученными уравнениями, если учесть, что $\dot{I} = \dot{I}_1$.

Метод узловых напряжений (потенциалов). При составлении контурных уравнений заданными источниками являются источники э. д. с. Зависимыми переменными выступают токи в замкну-

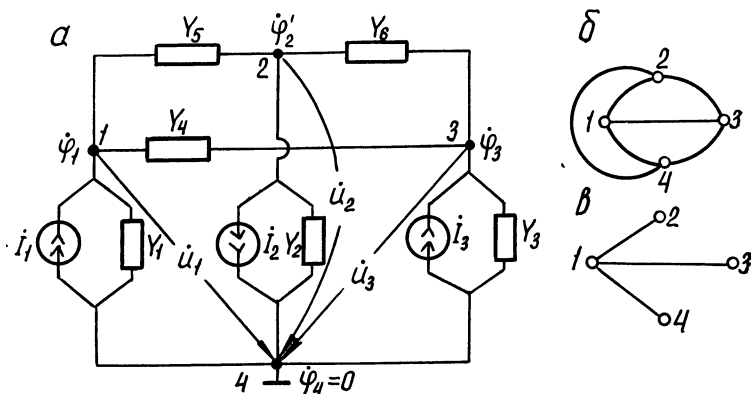


Рис. 31. Цепь с тремя независимыми узлами (а), ее граф (б) и дерево (в).

тых контурах, то есть контурные токи. Для каждого контура имеется одно уравнение, которое выражает состояние равновесия по напряжению.

Оказывается также возможным составить систему уравнений, в которой внешние силы представлены в виде токов, а реакция системы проявляется в качестве напряжений. В этом случае узлы заменяют собой замкнутые контуры. Для каждого узла имеется одно уравнение, которое выражает состояние равновесия по току (см. рис. 31).

На рисунке показаны схема цепи (а), ее граф (б) и дерево (в),

на примере которых можно рассмотреть применение метода узловых напряжений.

В дерево графа входят три ветви. Поэтому число независимых узлов равняется трем: $q - 1 = 3$. Примем, что в цепи действуют только источники тока $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ с проводимостями Y_1, Y_2, Y_3 соответственно. Все эти величины, также как и другие параметры схемы Y_4, Y_5, Y_6 , заданы. Реакция системы проявляется в виде напряжений $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$. Уточним понятия об этих напряжениях. Для этого обозначим потенциалы узлов через $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ и $\dot{\varphi}_4$ (рис. 31). За напряжение узлов можно принять разность потенциалов между узлами схемы и потенциалом произвольной точки схемы или точки, расположенной за пределами схемы. Эту точку, относительно которой отсчитываются потенциалы узлов, называют точкой отсчета, опорной или базисной точкой. Обозначим потенциалы опорной точки через $\dot{\varphi}_0$. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0; & \dot{U}_2 &= \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_0; \\ \dot{U}_3 &= \dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_0; & \dot{U}_4 &= \dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_0.\end{aligned}$$

При этом разность напряжений любых пар узлов будет равна

$$\dot{U}_2 - \dot{U}_3 = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_0 - (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_0) = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3.$$

Это означает, что разность напряжений между любой парой узлов равняется их разности потенциалов.

Совместим точку отсчета с одним из узлов схемы, например, с четвертым узлом. В этом случае $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_4$, а напряжения будут равны.

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4; & \dot{U}_2 &= \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4; \\ \dot{U}_3 &= \dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4; & \dot{U}_4 &= 0.\end{aligned}$$

Благодаря сохранению электрического заряда сумма токов, входящих во все узлы изолированной цепи, равна нулю. Эти токи зависят от разности между различными узловыми напряжениями. Эти напряжения остаются неизменными при увеличении потенциала каждого узла на одну и ту же величину. Поэтому, не нарушая общности анализа, можно считать один из узлов заземленным, то есть положить $\dot{\varphi}_4 = 0$. При этом ток, входящий в опорный узел из земли, всегда равен сумме токов, взятых с отрицательным знаком, входящих в остальные, незаземленные узлы. Если опорный узел заземлить ($\dot{\varphi}_4 = 0$), то напряжения между остальными узлами и опорным узлом будут равны потенциалам этих узлов. Поэтому данный метод называется также методом

узловых потенциалов. Напряжения в узлах цепи, отсчитанные относительно базисного узла, будем называть узловыми напряжениями, причем положительное направление их указывается стрелкой от рассматриваемого узла к базисному.

Искомые величинами в методе узловых напряжений являются узловые напряжения. При выборе переменных в виде узловых напряжений второй закон Кирхгофа выполняется автоматически для любого контура. Возьмем, например, контур, состоящий из проводимостей Y_1 , Y_3 и Y_4 . Уравнение второго закона Кирхгофа для этого контура запишется в виде:

$$-\dot{U}_1 + (\dot{U}_1 - \dot{U}_3) + \dot{U}_3 = 0.$$

Это равенство есть тождество, то есть выполняется при любых значениях узловых напряжений. То же самое получается для любого контура сложной цепи. Поэтому при выводе уравнений узловых напряжений мы можем пользоваться только первым законом Кирхгофа.

При использовании метода узловых напряжений расчет цепи ведут в следующем порядке.

1. Выбирают базисный узел и нумеруют независимые узлы. Базисный узел выбирается произвольно. В качестве базисного узла целесообразно брать узел, в котором сходится наибольшее количество ветвей. Это приводит к упрощению узловых уравнений. После этого независимые узлы определяются в схеме однозначно. Количество независимых узлов равняется количеству ветвей дерева, то есть $q-1$. Поэтому для определения количества узловых уравнений целесообразно вычерчивать граф и его дерево.

2. На схеме вводят обозначения узловых напряжений $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_{q-1}$ по числу независимых узлов. Все комплексные сопротивления заменяют комплексными проводимостями ($YZ=1$).

3. По первому закону Кирхгофа составляют узловые уравнения. Для схемы рис. 31, а они будут:

для узла 1

$$Y_1 \dot{U}_1 + Y_4 (\dot{U}_1 - \dot{U}_3) + Y_5 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \dot{I}_1;$$

для узла 2

$$Y_2 \dot{U}_2 + Y_5 (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + Y_6 (\dot{U}_2 - \dot{U}_3) = -\dot{I}_2;$$

для узла 3

$$Y_3 \dot{U}_3 + Y_4 (\dot{U}_3 - \dot{U}_1) + Y_6 (\dot{U}_3 - \dot{U}_2) = \dot{I}_3.$$

Здесь ток источника тока, приходящий к узлу, берется со знаком «плюс» а отходящий от узла — со знаком «минус».

Полученные выражения для узловых уравнений перепишем в следующей форме

$$(Y_1 + Y_4 + Y_5) \dot{U}_1 - Y_5 \dot{U}_2 - Y_4 \dot{U}_3 = \dot{I}_1;$$

$$\begin{aligned} & -Y_5\dot{U}_1 + (Y_2 + Y_5 + Y_6)\dot{U}_2 - Y_6\dot{U}_3 = -I_2; \\ & -Y_4\dot{U}_1 - Y_6\dot{U}_2 + (Y_3 + Y_4 + Y_6)\dot{U}_3 = I_3. \end{aligned}$$

Величина $Y_1 + Y_4 + Y_5$, представляющая собой сумму комплексных проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1, называется собственной проводимостью узла; величина Y_5 , равная комплексной проводимости ветви между узлами 1 и 2, входящая в уравнение со знаком минус, называется общей проводимостью между узлами 1 и 2.

В общем случае, если электрическая цепь содержит q узлов, то на основании первого закона Кирхгофа получается система из $q-1$ уравнений (узел q принят за базисный):

$$\begin{aligned} Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 + \cdots + Y_{1,q-1}\dot{U}_{q-1} &= \dot{I}_{11}, \\ Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 + \cdots + Y_{2,q-1}\dot{U}_{q-1} &= \dot{I}_{22}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$Y_{q-1,1}U_1 + Y_{q-1,2}U_2 + \cdots + Y_{q-1,q-1}\dot{U}_{q-1} = \dot{i}_{q-1,q-1}.$$

В уравнении (17) через Y_{kk} обозначена собственная проводимость k -го узла. Собственной проводимостью узла называется алгебраическая сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся к данному узлу. Она равна проводимости между k -ым узлом и всеми другими узлами, когда последние закорочены между собой, очевидно, она аналогична собственному сопротивлению контура, которое может быть определено как сопротивление контура в случае, когда все другие контуры разомкнуты; Y_{km} — обозначена общая проводимость ветви, соединяющей k -ый, узел с m -ым. Знак минус перед общей проводимостью стоит вследствие выбранного способа отсчета узловых напряжений. В правой части равенства стоит сумма задающих токов, притекающих к рассматриваемому узлу, которую называют задающим током узла.

4. Решая данную систему уравнений по правилу Крамера, находят узловые напряжения для k -го узла:

$$\dot{U}_k = \frac{1}{\Delta_Y} \sum_{i=1}^{q-1} \dot{I}_{il} \Delta_{ik}, \quad (18)$$

где Δ_y — главный определитель системы;

[illegible]

Δ_{ik} — алгебраическое дополнение элемента Y_{ik} главного определителя.

5. По закону Ома определяются токи в ветвях. Например, ток в ветви 5 будет равен $i_5 = Y_5 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2)$.

В матричной форме система уравнений (17) записывается одним равенством

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & \dots\dots\dots & Y_{1,q-1} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & \dots\dots\dots & Y_{2,q-1} \\ \hline \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \hline Y_{q-1,1} & Y_{q-1,2} & \dots\dots\dots & Y_{q-1,q-1} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \dot{U}_1 \\ \hline \dot{U}_2 \\ \hline \dots\dots\dots \\ \hline \dot{U}_{q-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \dot{I}_{11} \\ \hline \dot{I}_{22} \\ \hline \dots\dots\dots \\ \hline \dot{I}_{q-1,q-1} \\ \hline \end{array} \quad (19)$$

Матрица-столбец в правой части составлена из задающих токов узлов. Она называется матрицей задающих токов, или задающим вектором. Левая часть равенства представляет собой произведение квадратной матрицы порядка $q-1$, составленной из коэффициентов уравнения (17), и матрицы-столбца, $q-1$ элементов которой являются узловыми напряжениями. Элементы квадратной матрицы — это собственные и общие проводимости узлов, поэтому она называется матрицей проводимостей. Матрица-столбец узловых напряжений называется искомым вектором. Обозначив задающий вектор $\dot{I} = \|\dot{I}\|$, квадратную матрицу $Y = \|Y\|$, а искомый вектор $\dot{U} = \|\dot{U}\|$, матричное равенство (19) запишем в виде

$$Y\dot{U} = \dot{I} \text{ или } \|Y\| \cdot \|\dot{U}\| = \|\dot{I}\|. \quad (20)$$

Матрицы проводимостей $\|Y\|$ и задающий вектор $\|\dot{I}\|$ являются матрично-векторными параметрами схемы. Если они известны, то узловые напряжения определяются решением матричного равенства (20) относительно искомого вектора

$$\|\dot{U}\| = \|Y\|^{-1} \cdot \|\dot{I}\|. \quad (21)$$

Как и в методе контурных токов, матрично-векторные параметры можно записать непосредственно из рассмотрения схемы.

Сделаем несколько замечаний о применении метода узловых напряжений.

1. Если электрическая цепь содержит источники э. д. с., то их следует заменить источниками тока. Однако не всегда следует производить такую замену. При наличии только одной ветви с э. д. с. и бесконечной проводимостью целесообразно принять за базисный узел один из узлов, к которому примыкает данная ветвь, тогда напряжение другого узла становится известным и число неизвестных сокращается на одно.

Если в схеме имеются ветви, содержащие только э. д. с., то

эти ветви следует рассматривать как источники неизвестных токов, которые затем исключаются при сложении соответствующих уравнений. Дополнительными связями между неизвестными узловыми напряжениями будут являться известные напряжения между узлами, равные заданному э. д. с.

Однако надо иметь в виду, что, используя специальный прием «вынесение источника э. д. с. за узел», можно всегда преобразовать источник э. д. с. в источники тока.

Рассмотрим этот прием. Пусть между какими-либо двумя узлами схемы включен источник э. д. с. (рис. 32, а). Электрическое

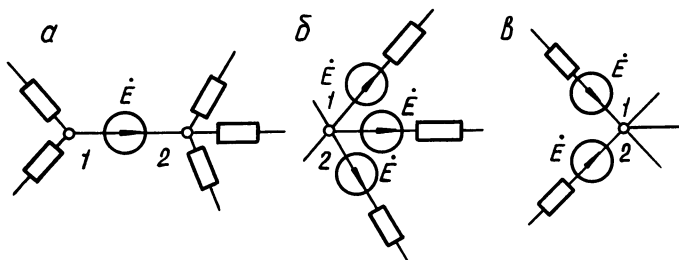


Рис. 32. Вынесение источника э. д. с. за узел: исходная схема (а), эквивалентная схема после вынесения источника за узел 1 (б).

состояние схемы не изменится, если узлы, между которыми находится источник, объединить в один узел, а в каждую из ветвей, сходящихся к этому узлу, включить источники с тем же значением э. д. с. При этом, если источник был направлен к узлу, за который он выносился, то в ветвях он должен быть направлен от узла. Имеются две возможности осуществить эту операцию, вынося источник за один из двух узлов, между которыми он включен (рис. 32 б и в).

Допустимость этого преобразования можно объяснить следующим образом. Примем узел 1 за начало отсчета узловых напряжений. Тогда напряжения всех ветвей, сходящихся в узле к, будут больше соответствующих напряжений, отсчитанных от узла 2, на величину задающей э. д. с. \dot{E} . Это значит, что распределение токов и напряжений в схеме не изменится, если включить в каждую ветвь, присоединенную к узлу 2, источник э. д. с. \dot{E} , а узлы 1 и 2 объединить в один узел. Подобные рассуждения справедливы и для случая, когда за начало отсчета принят узел 2.

После того, как источники э. д. с. вынесены за узел, переход к источникам тока осуществляется обычным путем. Следует заметить, что применение этого метода может усложнить расчет и не всегда является целесообразным.

2. Между уравнениями, составленными методом контурных токов и уравнениями, составленными методом узловых напряже-

ний, существует формальная симметрия. Эта симметрия проявляется в том, что контурные уравнения формально можно получить из узловых, если в последних произвести замену узлов на контуры, узловых напряжений — на контурные токи; задающие токи — на задающие э. д. с., а проводимости — на сопротивления.

Эта симметрия между уравнениями может быть распространена и на отдельные члены соответствующих уравнений. Это вытекает из зависимостей между током и напряжением на сопротивлении и проводимости $\dot{E}=r\dot{I}$, $\dot{I}=g\dot{E}$, на емкости и индуктивности $\dot{E}=pL\dot{I}$, $\dot{I}=pC\dot{E}$. Установление подобной закономерности составляет содержание так называемого принципа двойственности, или дуальности, в теории цепей. Об этом принципе более подробно будет сказано ниже.

3. Вопрос о том, каким методом целесообразнее воспользоваться при расчете цепей, как указывалось выше, не решается однозначно соотношением между количеством узловых и контурных уравнений. Безусловно, чем меньше количество уравнений, тем меньше нужно сделать вычислений. Однако в большинстве случаев практики метод узловых напряжений значительно удобнее метода контурных токов. Узловые уравнения более наглядно отражают физическое строение цепи. Выбор узлов однозначен, соответствующие уравнения могут быть написаны непосредственно, в то время как для составления уравнений контурных токов необходимо предварительно выбрать соответствующую систему контуров, что усложняет задачу, особенно в цепях с большим числом элементов. Это условие особенно важно, когда требуется решать обратную задачу, то есть найти цепь, отвечающую заданной системе уравнений.

Преимущество метода узловых напряжений возрастает при анализе схем с лампами и транзисторами. Паразитные емкости, шунтирующие электроды и другие элементы схемы, увеличивают число ветвей и соответственно контуров, но чаще всего не увеличивают количество узлов.

В заключение рассмотрим несколько примеров на применение метода узловых напряжений.

Пример 5. Составить уравнения по методу узловых напряжений для цепи, изображенной на рис. 33, а. Записать уравнения в матричной форме и определить матрицу проводимостей и матрицу задающих токов.

Заданы параметры всех элементов и источники э. д. с.

$$e_1 = E_{1m}e^{-at} \sin(\omega t + \psi_1); \quad e_2 = E_{2m}e^{-at} \sin(\omega t + \psi_2);$$

$$e_3 = E_{3m}e^{-at} \sin(\omega t + \psi_3).$$

Решение 1. Пронумеруем узлы. Введем обозначения для узловых напряжений. Четвертый узел выберем за опорный и при-

мом его потенциал нулевым. Количество независимых узлов определяется легко: оно равно $q - 1 = 4 - 1 = 3$. Преобразуем источники э. д. с. в источники тока (рис. 33, б) и запишем выражение для проводимостей всех ветвей и источников в обобщенной комплексной форме

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= E_{1m} e^{j\psi_1}; & \dot{I}_1 &= \dot{E}_1 Y_1; & \dot{E}_2 &= \dot{E}_{2m} e^{j\psi_2}; & \dot{I}_2 &= \dot{E}_2 Y_2; \\ \dot{E}_3 &= E_{3m} e^{j\psi_3}; & \dot{I}_3 &= \dot{E}_3 Y_3; & Y_1 &= \frac{1}{r_1 + pL_1}; & Y_2 &= \frac{1}{r_2 + \frac{1}{pC_2}}; \\ Y_3 &= \frac{1}{pL_3}; & Y_4 &= \frac{1}{r_1 + pL + \frac{1}{pC}}; & Y_5 &= \frac{1}{r_5}; & Y_6 &= \frac{1}{r_6 + \frac{1}{pC_6}}. \end{aligned}$$

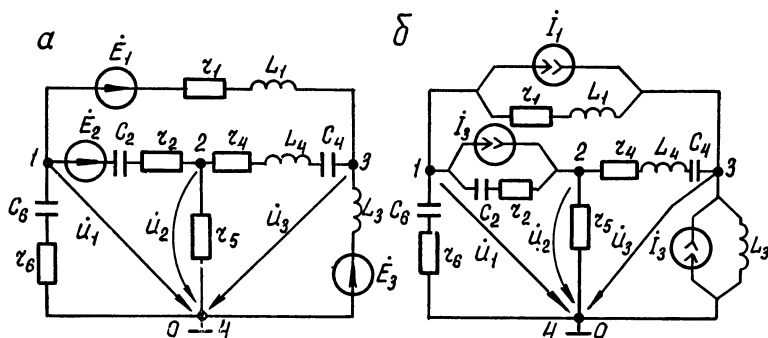


Рис. 33. Пример к составлению узловых уравнений.

2. Составляем узловые уравнения для узлов 1, 2, 3

$$\begin{aligned} Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 + Y_{13}\dot{U}_3 &= \dot{I}_{11}; \\ Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 + Y_{23}\dot{U}_3 &= \dot{I}_{22}; \\ Y_{31}\dot{U}_1 + Y_{32}\dot{U}_2 + Y_{33}\dot{U}_3 &= \dot{I}_{33}. \end{aligned}$$

3. Данную систему уравнений запишем в матричной форме

$$\|Y\| \cdot \|\dot{U}\| = \|\dot{I}\|.$$

Для матрицы проводимостей $\|Y\|$ получим

$$Y = \|Y\| = \begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_6 & -Y_2 & -Y_1 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_4 + Y_5 & -Y_4 \\ -Y_1 & -Y_4 & Y_1 + Y_3 + Y_4 \end{vmatrix}$$

Для матрицы-столбца задающих токов получим

$$\dot{I} = \|\dot{I}\| = \begin{bmatrix} -(i_1 + i_2) \\ i_2 \\ i_1 + i_3 \end{bmatrix}$$

Решив систему из трех уравнений относительно узловых напряжений $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$, легко находим напряжения на ветвях и токи в них.

Пример 6. Составить уравнения электрического равновесия по току для цепи рис. 34.

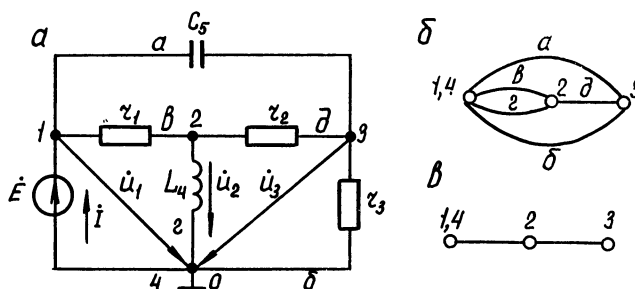


Рис. 34. Цепь с источником э. д. с., ее граф (б) и дерево (в).

Решение 1. Пронумеруем узлы. Введем обозначения для узловых напряжений. Четвертый узел выберем за опорный. Положим $\dot{\Phi}_4 = 0$. Количество независимых узлов определим с помощью дерева графа (рис. 34, в). Оно равняется двум. Это объясняется тем, что напряжение узла 1 определено источником э. д. с. Проводимости ветвей равны

$$Y_1 = \frac{1}{r_1}; \quad Y_2 = \frac{1}{r_2}; \quad Y_3 = \frac{1}{r_3}; \quad Y_4 = \frac{1}{pL_4}; \quad Y_5 = pC_5.$$

2. Составим уравнения для 2 и 3 узлов.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r_1} \dot{U}_1 + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{pL_4} \right) \dot{U}_2 - \frac{1}{r_2} \dot{U}_3 &= 0; \\ -pC_5 \dot{U}_1 - \frac{1}{r_2} \dot{U}_2 + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + pC_5 \right) \dot{U}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Замечая, что $\dot{U}_1 = \dot{E}$, после переноса известных величин вправо, получаем

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{pL_4}\right)\dot{U}_2 - \frac{1}{r_2}\dot{U}_3 = \frac{\dot{E}_1}{r_1};$$

$$-\frac{1}{r_2}\dot{U}_2 + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + pC_5\right)\dot{U}_3 = pC_5\dot{E}_1.$$

При составлении уравнений равновесия мы не преобразовали источник э. д. с в источники тока. Однако такое преобразование возможно, если воспользоваться приемами вынесения источника э. д. с. за узел (рис. 35).

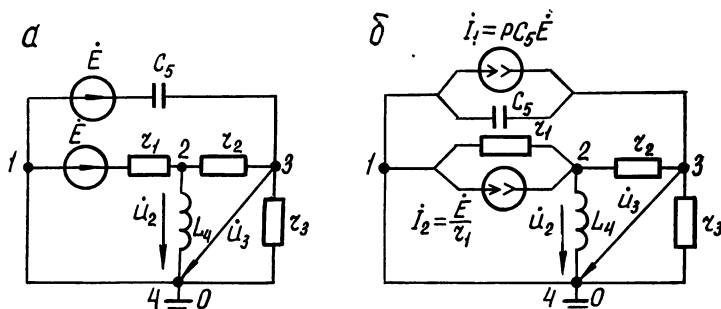


Рис. 35. Эквивалентная схема с вынесением источника э. д. с. за узел 1 (а), эквивалентная схема с источником тока (б).

Для узла 2 и 3 можно составить узловые уравнения:

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{pL_4}\right)\dot{U}_2 - \frac{1}{r_2}\dot{U}_3 = \frac{\dot{E}}{r_1};$$

$$-\frac{1}{r_2}\dot{U}_2 + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} + pC_5\right)\dot{U}_3 = pC_5\dot{E}.$$

Эти уравнения совпадают с ранее выведенными уравнениями.

Из методов определяющих координат нами рассмотрены методы контурных токов и узловых напряжений, которые обладают универсальностью и получили широкое распространение. Общий метод определяющих координат не получил широкого распространения и поэтому нами не рассматривается.

§ 4. Общие свойства линейных цепей. Методы расчета

К наиболее общим свойствам линейных цепей относятся: аддитивность, взаимность, дуальность.

На этих общих свойствах основаны методы расчета цепи, которые имеют одинаковое название. В этом параграфе мы рассмотрим наиболее общие свойства линейных цепей, выраженные в прин-

циях суперпозиции, взаимности и дуальности. Принцип суперпозиции нами рассмотрен в первой части. Поэтому начнем излагать материал с рассмотрения методов расчета, основанных на этом принципе.

Метод наложения. Метод расчета токов и напряжений, основанный на свойстве аддитивности (наложения) линейных цепей, называется методом наложения. В первой части было сформулировано это свойство, согласно которому отклик линейной цепи на несколько возмущений равен сумме откликов этой цепи на каждое возмущение, действующее по отдельности. Общие выражения для контурных токов (13) и узловых напряжений (18) являются математическими выражениями этих принципов. В самом деле, если в выражении

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta_Z} \sum_{i=1}^n \dot{E}_{ii} \Delta_{ik}$$

выписать эти суммы явно и сгруппировать члены, содержащие э. д. с. отдельных источников, то получим выражения для \dot{I}_k в виде слагаемых, каждое из которых будет иметь множителем э. д. с. того или иного источника. Из этого следует, что контурный ток в любом контуре равен сумме токов, вызываемых в этом контуре каждой из э. д. с. в отдельности.

Из выражения для узлового напряжения можно сделать точно такой же вывод, а именно: узловое напряжение между любым узлом и опорным равно сумме узловых напряжений, созданных между этим узлом и опорным каждым в отдельности источником тока.

Полезно заметить, что принцип наложения не применим для квадратичных форм, какими являются выражения для мощностей.

Метод наложения состоит в том, что искомая электрическая величина в виде тока или напряжения находится как алгебраическая сумма «частичных» электрических величин (откликов), обусловленных каждым источником (возмущением) отдельно. При этом все другие источники э. д. с. должны быть замкнуты накоротко с сохранением в ветвях их внутренних сопротивлений, а все другие источники тока — разомкнуты, но в соответствующих ветвях должны быть сохранены их внутренние проводимости.

Расчет линейных схем с несинусоидальными задающими токами и напряжениями можно свести в соответствии с принципом наложения к расчету схем для каждой гармоники с применением обобщенного символического метода, что значительно упрощает расчет. Сравнительная простота решения систем линейных уравнений и возможность применения при этом аппарата теории определителей и теории матриц обязаны именно принципу наложения.

К нелинейным системам принцип наложения не применим, вследствие чего расчет таких систем связан с большими трудностями.

Расчет цепи методом наложения поясним на примере цепи рис. 36, а.

Пусть требуется найти ток \dot{I}_3 в ветви Z_3 , используя метод наложения. Составим несколько видоизмененных схем цепи так, чтобы в каждой из них действовал только один источник (рис. 36, б, в). Схема (см. рис. 36, б) учитывает действие только источника э. д. с. и не учитывает действие источника тока. Так как последний имеет

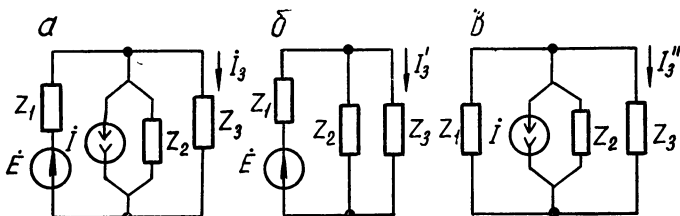


Рис. 36. Расчет цепи методом наложения.

бесконечное внутреннее сопротивление, то он в этой схеме разомкнут. Схема (см. рис. 36, в) учитывает действие только источника тока. Источник э. д. с. в ней замкнут, так как он имеет нулевое внутреннее сопротивление. Согласно принципу наложения искомый ток \dot{I}_3 равен алгебраической сумме «частичных» токов \dot{I}_3' и \dot{I}_3'' .

Вычисляя «частичные» токи из схем (рис. 36, б и в), получаем:

$$\dot{I}_3' = \frac{\dot{E}Z_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3};$$

$$\dot{I}_3'' = \frac{-iZ_1Z_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}.$$

Отсюда искомый ток

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_3' + \dot{I}_3'' = \frac{\dot{E}Z_2 - iZ_1Z_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3}.$$

Принцип взаимности. В электротехнике принцип взаимности и принцип обратимости формулируется как один и тот же принцип. Однако в общем случае взаимность и обратимость — разные понятия, совпадающие лишь в отдельных случаях.

Принцип взаимности раскрывает соотношения причинной обусловленности явлений и устанавливает отношения взаимности между причиной и действием (следствием). Изучение закономерностей между различными этапами движения физической системы, обусловленной причинно-следственными связями и соотношениями взаимности, привели к открытию принципа обратимости.

Обратимость — это свойство физической системы переходить из одного состояния в другое в последовательности, обратной пря-

мому процессу. Система обладает обратимыми свойствами, если условия передачи энергии через нее в «прямом» и «обратном» направлениях совпадают.

Для электрической цепи с одним однофазным входом и выходом, например для четырехполюсника, понятия взаимности и обратимости совпадают. Только этим можно объяснить, почему теорему взаимности в электротехнике называют также теоремой обратимости. Но если принцип взаимности справедлив для любой линейной пассивной электрической цепи, то принцип обратимости для

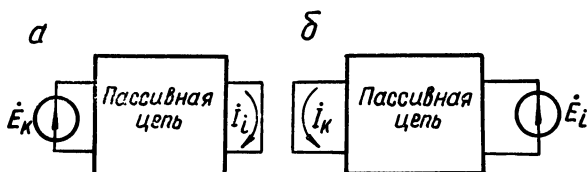


Рис. 37. К теореме взаимности.

этих цепей в общем случае не имеет места. Это относится, в первую очередь, к линейным многофазовым цепям.

Принцип взаимности в первоначальной форме для электрических цепей был установлен Г. Р. Кирхгофом в 1847 году для цепи с одной э. д. с. Этот принцип формулируется в следующей форме. Если э. д. с. \dot{E} , действуя в произвольной ветви сложной цепи, не содержащей других э. д. с., вызывает в какой-либо ветви ток I , то перенесенная в последнюю ветвь та же э. д. с. вызовет в первой ветви такой же ток \dot{I} . Этот принцип доказывается следующим образом. Возьмем линейную цепь, в которой имеется всего лишь одна э. д. с., находящаяся в k -ом контуре. На рис. 37, а условно выделены k -й и некоторый i -й контуры этой цепи. Согласно формуле (13), ток в i -ом контуре равен

$$\dot{I}_i = \frac{1}{\Delta_Z} \dot{E}_k \Delta_{ki}.$$

Теперь несколько изменим схему. Пусть единственная э. д. с. цепи находится в i -ом контуре (рис. 37, б). Тогда ток в k -ом контуре новой цепи

$$\dot{I}_k = \frac{1}{\Delta_Z} \dot{E}_i \Delta_{ik}.$$

Разделим первое уравнение на второе. Получим

$$\frac{\dot{I}_i}{\dot{I}_k} = \frac{\dot{E}_k}{\dot{E}_i} \frac{\Delta_{ki}}{\Delta_{ik}}, \quad (22)$$

где Δ_{ki} — алгебраическое дополнение элемента Z_{ki} в определителе Δ_Z , а Δ_{ik} есть алгебраическое дополнение элемента Z_{ik} в том же

определителе. Для цепи, не содержащей элементов с односторонней проводимостью $Z_{ki}=Z_{ik}$ при любых i и k , откуда вытекает

$$\Delta_{ik}=\Delta_{ki}.$$

Поэтому уравнение (22) можно записать в виде:

$$\frac{\dot{I}_i}{\dot{I}_k}=\frac{\dot{E}_k}{\dot{E}_i} \text{ или } \frac{\dot{E}_k}{\dot{I}_i}=\frac{\dot{E}_i}{\dot{I}_k}. \quad (23)$$

В частном случае, когда $\dot{E}_k=\dot{E}_i=\dot{E}$; $\dot{I}_i=\dot{I}_k=\dot{I}$, что и требовалось доказать.

Теорема взаимности утверждает, что отношение воздействия, приложенного к одной паре зажимов, к реакции на это воздействие на другой паре зажимов является одним и тем же независимо от того, какая пара зажимов выбрана в качестве выходной. Причем,

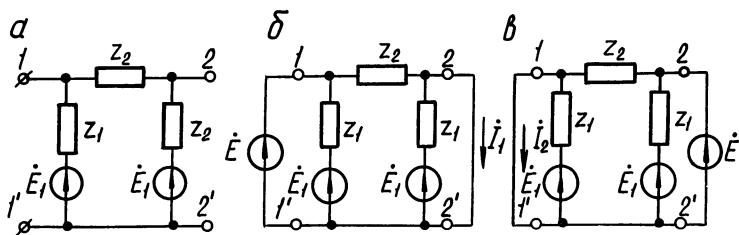


Рис. 38. Обратимая активная цепь.

если воздействием является ток, то реакция на воздействие должна соответствовать напряжению холостого хода. Если воздействием является напряжение, то реакция на воздействие должна соответствовать току короткого замыкания. Обратимость не имеет места, например для реакции напряжения реактивной цепи, если воздействием является напряжение.

Воспользовавшись формулой (18), на основании свойства симметрии матрицы проводимостей схемы можно доказать справедливость и другой формулировки теоремы взаимности: задающий ток, действующий в каком-либо узле пассивной линейной цепи, вызывает в другом узле такое же узловое напряжение, какое в первом узле ток, перенесенный во второй узел.

Схемы, для которых справедлива теорема взаимности, называются взаимными схемами. Эти схемы называются также обратимыми. Однако такое название правомерно с оговорками, сделанными выше. Все пассивные линейные цепи относятся к множеству взаимных схем. Что же касается активных цепей, то они, как правило, невзаимны. Однако в некоторых частных случаях и они могут оказаться взаимными. Например, активная цепь, показанная

на рис. 38, является взаимной. Действительно, нетрудно видеть, что токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 в цепях (см. рис. 38, б, в) одинаковы.

В данном случае взаимность активной цепи обусловлена полной ее симметрией относительно пар зажимов 1—1' и 2—2'. Если такого рода симметрия будет нарушена, то цепь теряет свойства взаимности. Так будет, например, если в поперечных ветвях схемы рис. 38, а будут стоять неравные сопротивления.

Применение принципов взаимности к расчету цепей позволяет в ряде случаев находить решения задач, недоступные или затруднительные для прямых методов. Свойство взаимности может быть успешно использовано для экспериментального определения характеристик динамической системы, не всегда удобно поддающихся непосредственному измерению. Ниже нам придется решать задачи по анализу с применением принципа взаимности.

Принцип взаимности нами был сформулирован и обоснован для линейных цепей с одной э. д. с. Теперь сформулируем и докажем обобщенный принцип взаимности для линейной электрической цепи с любым количеством источников энергии.

Рассмотрим цепь из n контуров и запишем одно из контурных уравнений

$$\dot{E}_{kk} = \sum_{m=1}^n Z_{km} \dot{I}_m. \quad (24)$$

Пусть сначала в электрической цепи действует некоторая совокупность э. д. с. \dot{E} . При этом в контурах потекут токи \dot{I} и система уравнений, характеризующая это состояние, примет вид (24). Пусть затем действует другая совокупность э. д. с. \dot{E}' , вызывающая токи в цепи \dot{I}' . При этом уравнения (24) примут вид:

$$\dot{E}'_{kk} = \sum_{m=1}^n Z_{km} \dot{I}'_m. \quad (25)$$

Умножая выражение (24) на \dot{I}'_k , а (25) — на \dot{I}_k и суммируя их по всем k , получаем:

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_{kk} \dot{I}'_k = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n Z_{km} \dot{I}_m \dot{I}'_k; \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}'_{kk} \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n Z_{mk} \dot{I}'_m \dot{I}_k. \quad (27)$$

Переставим в (27) местами индексы m и k и переменим порядок суммирования. Получим

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n Z_{mk} \dot{I}'_m \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n Z_{km} \dot{I}_m \dot{I}'_k.$$

Сопоставляя (25) и (27), находим, что если удовлетворяется условие

$$Z_{mk} = Z_{km},$$

то

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_{kk} \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n Z_{mk} \dot{I}_m \dot{I}'_k.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_{kk} \dot{I}'_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}'_{kk} \dot{I}_k$$

или

$$\sum_{k=1}^n (\dot{E}_{kk} \dot{I}'_k - \dot{E}'_{kk} \dot{I}_k) = 0. \quad (28)$$

Уравнения (28) являются выражением обобщенного принципа взаимности для линейной электрической цепи. Согласно этому принципу сумма произведений задающих э. д. с. одной совокупности на соответствующие токи контуров, обусловленное второй совокупностью э. д. с., равняется сумме произведений второй совокупности на контурные токи, полученные при действии первой совокупности э. д. с.

Из обобщенного принципа взаимности вытекает и ранее сформулированный принцип для случая одной э. д. с. в цепи. Когда в первой совокупности действует только одна э. д. с. \dot{E}_1 , а все остальные равны нулю, а во второй совокупности только \dot{E}_2 , а остальные равны нулю, то уравнение (28) принимает вид:

$$\dot{E}_1 \dot{I}'_1 = \dot{E}_2 \dot{I}_2,$$

или

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{E}_2}{\dot{I}'_1}.$$

Принцип взаимности справедлив также для линейной цепи в нестационарных режимах при произвольной форме приложенной э. д. с. (тока) и нулевых начальных условиях.

Принцип дуальности. Наряду с принципом наложения и взаимности, третьим, наиболее общим принципом линейных систем является принцип дуальности.

В линейных цепях между токами и напряжениями существует взаимно однозначное соответствие, являющееся проявлением причинно-следственных связей между ними. Напряжение на каком-либо элементе можно считать следствием протекания по этому элементу тока, как и ток, протекающий через элемент, можно считать следствием приложенного к этому элементу напряжения. Взаимная замена роли u и i математически приводит к замене r на g и

L на C . Запишем уравнения элементов относительно напряжений, токов и сгруппируем их так, чтобы они совпадали по форме

$$\begin{aligned}u_r &= r i_r; & i_r &= g u_r; \\u_L &= L \frac{di_L}{dt}; & i_c &= C \frac{du_c}{dt}; \\u_c &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c dt; & i_L &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt\end{aligned}$$

или при экспоненциальном воздействии в принужденном режиме

$$\begin{aligned}\dot{U}_r &= r \dot{I}_r; & \dot{I}_r &= g \dot{U}_r; \\\dot{U}_L &= p L \dot{I}_L; & \dot{I}_c &= p C \dot{U}_c; \\\dot{U}_c &= \frac{1}{pC} \dot{I}_c; & \dot{I}_L &= \frac{1}{pL} \dot{U}_L.\end{aligned}$$

Напряжение в одной группе равенств соответствует току в другой группе и, наоборот, ток в одной группе равенств соответствует напряжению в другой группе. Это влечет, в свою очередь, взаимное соответствие элементов: сопротивления r и проводимости g ; индуктивности L и емкости C . Взаимное соответствие существует не только между физическими величинами и параметрами цепи, но и геометрическими свойствами цепи. Здесь свойство взаимного соответствия проявляется в попарном свойстве линейных графов. Выпишем эти свойства:

Контур	Пара узлов
Ветвь дерева	Хорда (главная ветвь)
Последовательно	Параллельно
Разомкнутая цепь	Замкнутая цепь
Система	Система

Такое попарное взаимное соответствие называется дуальностью или двойственностью, а соответствующие величины — дуальными величинами или аналогами. Попарное соответствие проявляется в законах Кирхгофа.

Первый закон
Алгебраическая сумма токов
в узле

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

Второй закон
Алгебраическая сумма
напряжений в контуре

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0$$

Второй закон получается из первого, если в последнем заменить «ток», «узел» их аналогами — «напряжение», «контур».

Дуальность проявляется в контурных и узловых уравнениях, дуальны источники э. д. с. и источники тока.

Принцип дуальности формулируется следующим образом. При замене величин, параметров, структур и уравнений соответствующими дуальными величинами новые формулировки сохраняют дуальный смысл. Практическое значение принципа дуальности

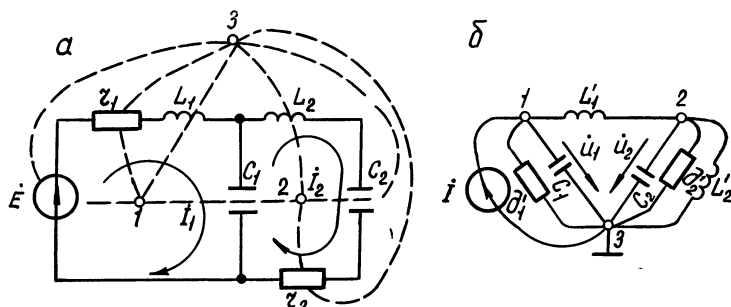


Рис. 39. Построение дуальной цепи.

состоит в том, что, зная одну группу соотношений, можно получить другую группу дуальных соотношений заменой всех величин и понятий соответствующими дуальными величинами. Так, например, решение уравнений контурных токов для некоторой цепи одновременно дает решение уравнений напряжений узловых пар для дуальной цепи.

Построение дуальной схемы для некоторой исходной цепи можно выполнить в три этапа (правило Кауэра).

1. Поставить внутри каждого контура графа точки 1, 2 (рис. 39, а). Эти точки будут узлами нового дуального графа. Точка 3 ставится вне цепи. Узлы нумеруются в соответствии с контурами, в которых они находятся.

2. Соединяется каждая пара соседних узлов линией, пересекающей одну ветвь (рис. 39, б).

3. Если исходный граф направленный, то ветви дуального графа ориентируются. Направление дуальной ветви берется от узла внутри контура, если направление ветви контура исходного графа совпадает с направлением обхода контура по часовой стрелке, в противном случае направление берется к узлу.

4. Каждая ветвь заменяется дуальной ветвью.

Направление э. д. с. и токов дуальных источников выбирается по следующему правилу. Если э. д. с. источника действует в положительном направлении контура (по ходу часовой стрелки), то ток источника тока в дуальной цепи направлен к узлу, соответствующему данному контуру исходной схемы.

Дуальная схема существует для любой плоской цепи. Для неплюской цепи дуальная схема вообще не существует. Неплюскую цепь можно заменить эквивалентной ей плоской цепью и затем найти дуальную схему, но в последней неизбежно применение идеальных трансформаторов.

Принцип дуальности имеет большое значение для теории линейных цепей и систем, позволяя из известных положений и схем выводить новые положения и схемы. Принцип дуальности имеет большое значение для техники моделирования неэлектрических объектов электрическими схемами. На основании этого принципа указанные схемы можно строить в двух формах и выбрать затем ту форму, которая наиболее удобна для решения задачи.

§ 5. Общие теоремы линейных цепей. Методы расчета

[К общим теоремам линейных цепей относятся: теорема компенсации; теорема об изменении токов в цепи при изменении сопротивления в ветви; теорема об эквивалентном источнике.

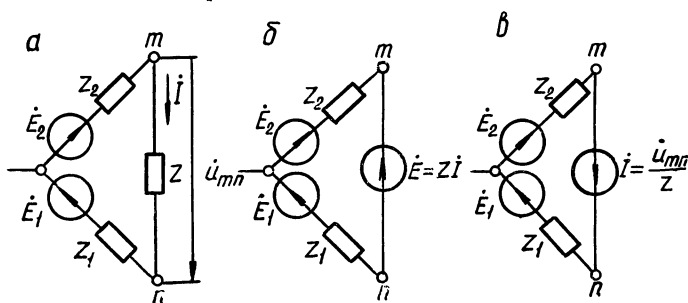


Рис. 40. Иллюстрация теоремы компенсации.

Теоремы компенсации и об изменении токов в цепи при изменении сопротивления в ветви. Рассмотрим некоторый контур цепи (рис. 40, а) и запишем для него уравнение второго закона Кирхгофа

$$Z\dot{I} + Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2.$$

Если член $Z\dot{I}$ перенести в правую часть уравнения

$$Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 - Z\dot{I},$$

то его можно рассматривать как э. д. с. величиной $Z\dot{I}$, направленную противоположно току \dot{I} , на что указывает знак этого члена (рис. 40, б). Из этого следует положение, которое называется теоремой компенсации.

Токи в электрической цепи не изменяются, если любой ее пассивный двухполюсник заменить источником, э. д. с. которого равна падению напряжения на этом двухполюснике, либо источником, задающий ток которого равен протекающему через двухполюсник току (рис. 40, в).

Доказательство последнего утверждения относительно источника тока основано на том, что записанные по первому закону

Кирхгофа уравнения для схем рис. 40, а и в сохраняют свой вид, если протекающий через двухполюсник ток считать задающим током, равным \dot{U}_{mn}/Z .

Теорема компенсации совместно с принципом наложения применяется для определения токов или напряжений при изменении в схеме какого-либо сопротивления. На конкретном примере рассмотрим, как это делается. Пусть имеется цепь (рис. 41, а).

В этой цепи выберем две ветви Z_1 и Z_2 , каждая из которых входит только в один контур. Ветвь с изменяемым сопротивлением выберем Z_2 , а в ветвях Z_1 и Z_3 будем определять ток при

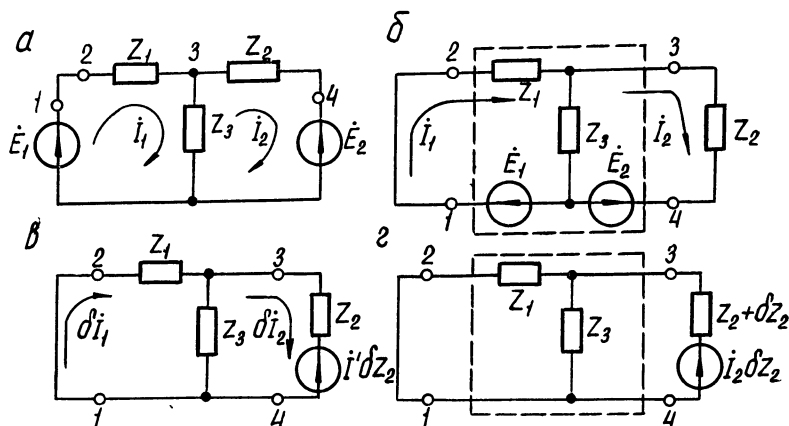


Рис. 41. К определению токов и напряжений в цепи при изменении сопротивления в ветви.

изменении Z_2 . На рис. 41, б изображена та же цепь с выделенными ветвями в первом и во втором контурах. При изменении сопротивления Z_2 на величину δZ_2 токи в ветвях примут значения $I_1 = I_1 + \delta I_1$ и $I_2 = I_2 + \delta I_2$.

Для определения приращений токов δI_1 и δI_2 применим теоремы компенсации и наложения. По теореме компенсации изменение сопротивления на величину δZ_2 равносильно включению последовательно с этим сопротивлением источника э. д. с. $I_2' \delta Z_2$, а из теоремы наложения вытекает, что изменение токов в цепи равно токам, которые протекают под действием только источника э. д. с. $I_2' \delta Z_2$ (см. рис. 41, в). На этом рисунке изображена схема для приращения токов.

Если принять все источники цепи равными нулю и сохранить только один источник $I_2' \delta Z_2$ во втором контуре, то получим

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_3) \delta I_1 - Z_3 \delta I_2 &= 0; \\ -Z_3 \delta I_1 + (Z_2 + Z_3) \delta I_2 &= -I_2' \delta Z_2. \end{aligned}$$

Если учесть, что ток \dot{I}_2 до изменения Z_2 нами был определен, то заменяя $\dot{I}'_2 = \dot{I}_2 + \delta\dot{I}_2$, получим следующую систему двух уравнений

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_3)\delta\dot{I}_1 - Z_3\delta\dot{I}_2 &= 0; \\ -Z_3\delta\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3 + \delta Z_2)\delta\dot{I}_2 &= -\dot{I}_2\delta Z_2. \end{aligned}$$

Этой системе соответствует эквивалентная схема, изображенная на рис. 41, г. Теперь можно определить $\delta\dot{I}_1$ и $\delta\dot{I}_2$,

$$\begin{aligned} \delta\dot{I}_1 &= - \frac{\begin{vmatrix} 0 & -Z_3 \\ -\dot{I}_2\delta Z_2 & Z_2 + Z_3 + \delta Z_2 \end{vmatrix}}{\Delta'_Z} = - \frac{\Delta_{21}\dot{I}_2\delta Z_2}{\Delta'_Z}, \\ \delta\dot{I}_2 &= - \frac{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & 0 \\ -Z_3 & -\dot{I}_2\delta Z_2 \end{vmatrix}}{\Delta'_Z} = - \frac{\Delta_{22}\dot{I}_2\delta Z_2}{\Delta'_Z}. \end{aligned}$$

Здесь через Δ'_Z обозначен главный определитель матрицы сопротивлений измененной цепи, а через Δ_{21} и Δ_{22} алгебраические дополнения, т. е. $\Delta_{21} = Z_3$ и $\Delta_{22} = Z_1 + Z_3$.

Из полученной эквивалентной схемы и выражений для приращений токов можно сделать следующий вывод. Изменение тока в электрической цепи при изменении сопротивления во второй ветви на δZ_2 , через которую протекал ток \dot{I}_2 , будет таким же, какое вызывается действием источника э. д. с. с напряжением $\dot{I}_2\delta Z_2$, включенного последовательно с измененным сопротивлением и направленного противоположно первоначальному току \dot{I}_2 (рис. 41, г). Этот результат можно обобщить на цепь любой сложности.

Повторим вкратце вывод в общем виде. Выделим в такой сложной цепи две ветви и предположим, что через них проходит по одному контуру: через ветвь, в которой находится изменяемое сопротивление Z_q , проходит контур q (рис. 42, а). Рис. 42, а соответствует рис. 41, б. Активный четырехполюсник обозначим буквой А. При изменении Z_q на величину δZ_q (рис. 42, б) токи в ветвях получают приращения $\delta\dot{I}_p$ и $\delta\dot{I}_q$ и их значения будут $\dot{I}'_p = \dot{I}_p + \delta\dot{I}_p$, $\dot{I}'_q = \dot{I}_q + \delta\dot{I}_q$.

Для составления схемы приращения токов, которая соответствовала бы схеме рис. 41, в, нужно применить теорему компенсации и принцип наложения. В результате получим схему рис. 42, в, на которой буквой П обозначим пассивный четырехполюсник. Этому четырехполюснику на рис. 41, в соответствует часть цепи, обведенная пунктиром.

Приняв токи всех источников в схеме равными нулю и считая, что действует единственный источник $\dot{I}_q \delta Z$ в контуре q , на основании формулы (14) можем записать

$$\delta \dot{I}_p = \frac{\Delta_{qp} (\dot{I}_q + \delta \dot{I}_q) \delta Z_q}{\Delta_Z}; \quad (29)$$

$$\delta \dot{I}_q = \frac{\Delta_{qq} (\dot{I}_q + \delta \dot{I}_q) \delta Z_q}{\Delta_Z}; \quad (30)$$

где Δ_Z — определитель матрицы сопротивлений цепи до изменения сопротивления Z_q . Из уравнения (30) определим $\delta \dot{I}_q$:

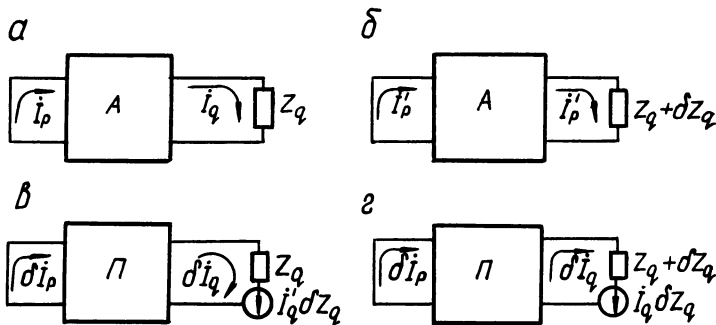


Рис. 42. К теореме об изменении тока в цепи при изменении сопротивления в ветви.

$$\delta \dot{I}_q = \frac{-\Delta_{qq} \dot{I}_q \delta Z_q}{\Delta_Z + \Delta_{qq} \delta Z_q}. \quad (31)$$

Подставив это значение в уравнение (29), получим

$$\delta \dot{I}_p = - \frac{\Delta_{qp} \dot{I}_q \delta Z_q}{\Delta_Z + \Delta_{qq} \delta Z_q}. \quad (32)$$

Поскольку сопротивление Z_q входит только в контур q , оно пишется в матрицу сопротивлений цепи на пересечении q -й строки и q -го столбца. Так же будет находиться и величина δZ_q , если матрица записывается с учетом изменения сопротивления Z . Поэтому сумма $\Delta_Z + \Delta_{qq} \delta Z_q$ в знаменателях выражений (31) и (32) равна определителю Δ_Z матрицы сопротивлений схемы после изменения сопротивления Z_q . В то же время алгебраические дополнения Δ_{qp} и Δ_{qq} не зависят от значения сопротивления Z_q , так как при их образовании вычеркивается q -я строка. Таким образом, для уравнений (31) и (32) получим

$$\delta \dot{I}_q = - \frac{\Delta_{qq}}{\Delta'_Z} \dot{I}_q \delta Z_q;$$

$$\delta \dot{I}_p = - \frac{\Delta_{qp}}{\Delta'_Z} \dot{I}_q \delta Z_q.$$

Отсюда следует более широкая формулировка для определения изменений токов в цепи при изменении сопротивления какой-либо ветви. Изменение токов в цепи при изменении какого-либо сопротивления, через которое протекает ток \dot{I}_q , на величину δZ_q будет таким же, какое вызывается действием источника с задающим напряжением $\dot{I}_q \delta Z_q$, включенного последовательно с измененным сопротивлением и направленного противоположно первоначальному току (рис. 42, з).

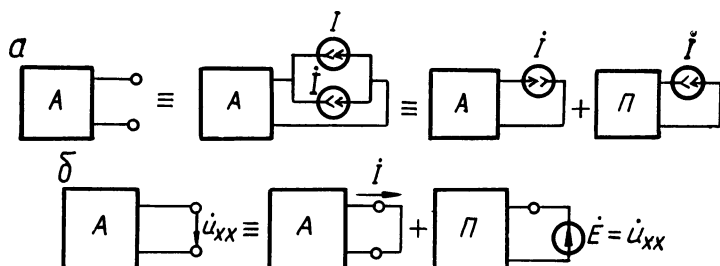


Рис. 43. Размыкание ветви: вариант с источником тока (а), вариант с источником э. д. с. (б)

При размыкании ветви $\delta Z = \infty$, в этом случае решение по данной теореме становится неопределенным, так как для приращения токов получается выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$. В этом случае можно применить следующие приемы.

1. Включим два источника тока, соединенных параллельно. Режим разомкнутой цепи при этом не изменится (рис. 43, а).

Приняв за \dot{I} ток, равный по величине току в ветви до ее размыкания, и применяя метод наложения, приходим к выводу, что размыкание ветви равносильно добавлению к токам предшествующего режима новой системы токов, обусловленных действием в данной ветви пассивной цепи источника тока, равного току, протекающему в той же ветви перед ее размыканием.

2. Обозначим через \dot{U}_{xx} напряжение холостого хода на концах разомкнутых зажимов и присоединим к ним источник э. д. с. $\dot{E} = \dot{U}_{xx}$; токи в цепи при этом не изменяются. Применив метод наложения, получим, что размыкание ветви равносильно добавлению к токам предшествующего режима новой системы токов, обуслов-

ленных в данной ветви пассивной цепи источника э. д. с., равного напряжению холостого хода на этих зажимах.

Применяя теорему компенсации и принцип наложения, можно убедиться в том, что напряжения и токи в выделенной какой-то части цепи являются линейными функциями напряжения на данном участке или тока, проходящего через него. Например, если при изменении комплексного сопротивления Z в какой-либо ветви изменяется ток \dot{I}_1 в этой ветви, то ток \dot{I}_2 в какой-либо другой ветви связан с \dot{I}_1 линейной функциональной зависимостью

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2(z=\infty) + K\dot{I}_1,$$

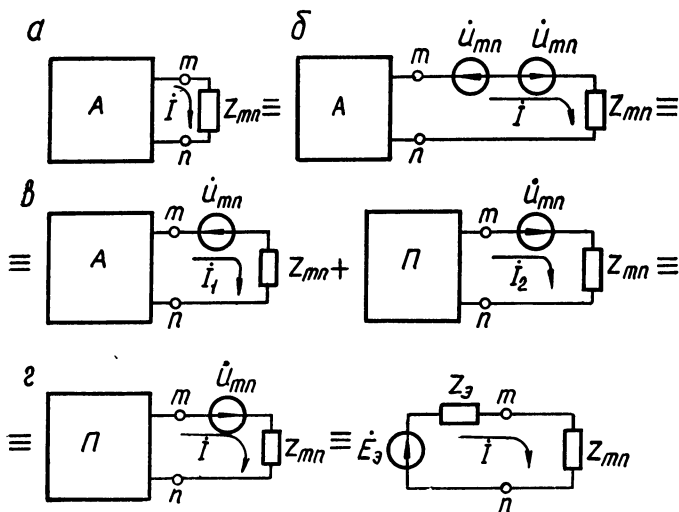


Рис. 44. К доказательству теоремы об эквивалентном генераторе.

где $\dot{I}_2(z=\infty)$ — значение тока \dot{I}_2 при разомкнутой первой ветви ($Z=\infty$).

Комплексный коэффициент K находится из условия, что при $Z=0$

$$\dot{I}_2(z=0) = \dot{I}_2(z=\infty) + K\dot{I}_1(z=0),$$

поэтому

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2(z=\infty) + \frac{\dot{I}_2(z=0) - \dot{I}_2(z=\infty)}{\dot{I}_1(z=0)}.$$

Теорема об эквивалентном источнике. При анализе цепей часто возникает задача о вычислении тока в части цепи или напряжения на зажимах этой части цепи без решения контурных или узло-

вых уравнений. Эта задача решается с помощью теоремы об эквивалентном источнике, которая позволяет сложную электрическую цепь с произвольным числом источников электрической энергии приводить к схеме с одним источником.

Существует два варианта теоремы об эквивалентном источнике: с источником напряжения и с источником тока.

Теорема об эквивалентном источнике напряжения формулируется следующим образом. Любая сложная линейная цепь по отношению к выделенной ветви mn с сопротивлением Z_{mn} эквивалентна генератору напряжения, э. д. с. которого равна напряжению холостого хода относительно зажимов mn и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению пассивной электрической цепи при отключенном сопротивлении Z_{mn} .

Для доказательства данной теоремы рассмотрим некоторую электрическую цепь и выделим в ней ветвь Z_{mn} , в которой требуется определить ток (рис. 44, б). Ток в цепи не изменится, если в ветвь mn добавить два компенсирующих друг друга источника \dot{U}_{mn} (рис. 44, в). При этом \dot{U}_{mn} выберем равным напряжению между зажимами mn при разомкнутой ветви mn , то есть напряжению холостого хода.

Применим теперь принцип наложения, а именно: представим ток \dot{I} в виде суммы двух токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , причем ток \dot{I}_1 вызывается всеми источниками энергии цепи и источником \dot{U}_{mn} (рис. 44, в), а ток \dot{I}_2 только источником \dot{U}_{mn} , имеющим направление тока \dot{I} . Так как \dot{U}_{mn} по величине выбрано равным напряжению холостого хода, то ток $\dot{I}_1 = 0$. Таким образом, ток $\dot{I} = \dot{I}_2$, а следовательно, мы получаем эквивалентную схему, изображенную на рис. 44, г. Из этой схемы следует, что ток в сопротивлении Z_{mn} равен

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3 + Z_{mn}} = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_3 + Z_{mn}}, \quad (33)$$

где \dot{U}_{mn} — напряжение холостого хода относительно зажимов mn .

Таким образом, для определения тока \dot{I} в ветви необходимо экспериментально или расчетным путем найти напряжение \dot{U}_{mn} при разрыве ветви mn и сопротивление Z_3 всей прочей части цепи при замкнутых накоротко источниках э. д. с. и разомкнутых источниках тока.

Практически Z_3 можно определить экспериментально. Для этого обозначим ток в ветви mn при $Z_{mn} = 0$, то есть при замыкании этой ветви накоротко, через $\dot{I}_{кз}$. Тогда из выражения (33) получим

$$Z_3 = \dot{U}_{mn} / \dot{I}_{кз} = \dot{U}_{xx} / \dot{I}_{кз}.$$

Таким образом, сопротивление эквивалентного генератора равно отношению напряжения холостого хода к току короткого замыкания ветви mn .

Пример 7. Определить ток в диагональной ветви мостовой схемы (рис. 45, а), пользуясь теоремой об эквивалентном источнике напряжения.

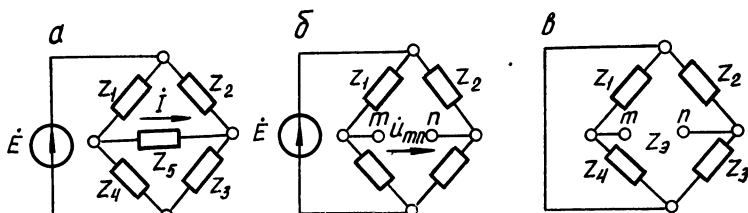


Рис. 45. К расчету тока \dot{i} методом эквивалентного источника напряжения.

Решение 1. Определим э.д.с. эквивалентного источника напряжения \dot{E}_3 . Для этого разомкнем ветвь mn и определим \dot{U}_{mn} как напряжение холостого хода. Это напряжение равно разности напряжений на участках Z_4 и Z_3 (рис. 45, б).

$$\dot{U}_{mn} = \dot{U}_m - \dot{U}_n = Z_4 \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_4} - Z_3 \frac{\dot{E}}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \dot{E}.$$

2. Определим сопротивление эквивалентного генератора Z_3 . Оно равно входному сопротивлению между зажимами mn пассивной цепи (рис. 45, в)

$$Z_3 = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

3. Определим ток \dot{i} . На основании уравнения (33)

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_3 + Z_5}.$$

Теперь рассмотрим теорему об эквивалентном источнике тока, которая является аналогом теоремы об эквивалентном источнике напряжения.

Любая сложная линейная цепь по отношению к выделенной ветви mn с сопротивлением Z_{mn} эквивалентна источнику тока, величина которого равна току, проходящему между зажимами mn , замкнутыми накоротко, а внутренняя проводимость равняется входной проводимости пассивной электрической цепи со стороны зажимов m и n при отключенной ветви mn .

Данная теорема вытекает из условия эквивалентности источников напряжения и тока. В схеме эквивалентного генератора

(рис. 46) можно генератор напряжения заменить генератором тока с соблюдением условия эквивалентности, то есть

$$\dot{I}_{mn} = \frac{\dot{U}_{mn}}{Z_3} = Y_3 \dot{U}_{mn}.$$

Но этот ток равен току, проходящему между зажимами m и n , замкнутыми накоротко (ток короткого замыкания). Искомый ток в цепи равен:

$$\dot{I} = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_{mn}} \dot{I}_{mn} = \frac{Y_{mn}}{Y_3 + Y_{mn}} \dot{I}_{mn},$$

где

$$Y_{mn} = \frac{1}{Z_{mn}}.$$

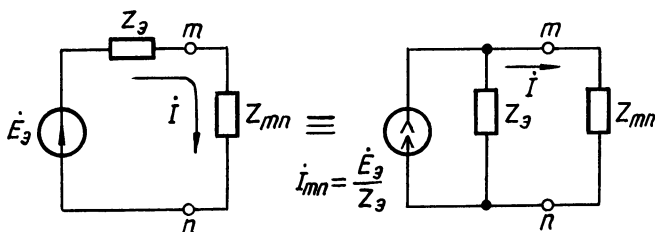


Рис. 46. К теореме об эквивалентном источнике тока.

Теорема об эквивалентных источниках энергии была доказана Г. Гельмгольцем в 1851 г. и повторно в 1883 г. Тевенином (теорема об эквивалентном источнике напряжения) и Нортоном (теорема об эквивалентном источнике тока).

Теорему об эквивалентном генераторе удобно использовать при решении задачи подбора параметров в данной ветви, приключенной к сложной цепи, для получения максимальной активной мощности. Применяв теорему об эквивалентном генераторе, ток в приемнике можно определить в виде

$$\dot{I}_{\text{пр}} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3 + Z_{\text{пр}}}.$$

После чего, используя теорему о максимальной активности мощности, можно подобрать $Z_{\text{пр}}$ таким образом, чтобы

$$Z_3 = Z_{\text{пр}}^*.$$

При соблюдении этого условия, как это было показано выше, в нагрузке будет выделяться максимальная активная мощность.

Нами рассмотрены основные методы анализа линейных цепей без взаимной индукции. Всю рассмотренную совокупность методов мы разбили на четыре группы. К ним относятся методы преоб-

разования схем; методы определяющих координат; методы, основанные на использовании общих свойств линейных цепей, выраженных в форме принципов; методы, основанные на использовании общих теорем линейности цепей. В основу такой классификации положен способ упрощения анализа цепей.

Другая классификация методов анализа линейных цепей приведена в монографии [8].

За последнее время получил широкое распространение метод переменных состояний системы. Этот метод мы рассмотрим в отдельной главе.

§ 6. Особенности анализа индуктивно связанных цепей

Основные понятия. Индуктивно связанными цепями называются цепи, в которых наблюдается явление наведения э. д. с. в одной электрической цепи при изменении потока взаимной индукции, обусловленного током в другой электрической цепи. Индуктивно связанные цепи связаны общим магнитным потоком. Явление наведения э. д. с. в какой-либо цепи при изменении тока в другой цепи называется явлением взаимной индукции. Наведенная э. д. с. называется э. д. с. взаимной индукции.

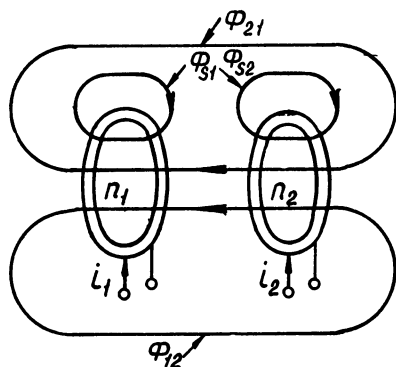


Рис. 47. Индуктивно связанные катушки.

Рассмотрим две индуктивно связанных катушки (рис. 47). Допустим, что первая катушка состоит из n_1 витков, а вторая — из n_2 витков, расположенных в каждой катушке настолько близко

один к другому, что магнитный поток, проходящий внутри одного из витков, охватывает и все остальные витки данной катушки. На рис. 47 условно показана картина магнитного поля элементов. Чтобы рисунок был более понятным, на нем изображено только по одной силовой линии каждого из потоков. При этом приняты следующие обозначения магнитных потоков:

Φ_{21} — поток, сцепляющийся со второй катушкой и определяемый током в первой катушке;

Φ_{12} — поток, сцепляющийся с первой катушкой и определяемый током во второй катушке;

Φ_{s1} — поток первой катушки, пронизывающий только витки этой катушки;

Φ_{s2} — поток второй катушки, пронизывающий только витки этой катушки;

Φ_{11} — весь поток, созданный током первой катушки i_1 ;

Φ_{22} — весь поток, созданный током второй катушки i_2 .

Потоки Φ_{12} и Φ_{21} называются потоками взаимной индукции. Условимся, что первый индекс всегда будет указывать, с какой цепью или катушкой рассматривается сцепление потока. Вторым индекс указывает, какая цепь или катушка создает поток.

Из сказанного следует, что

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{s1}; \quad (34)$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{s2}. \quad (35)$$

Таким образом, поток, созданный током каждой катушки, разделяется на две части. Одна часть этого потока пронизывает витки обеих катушек, а другая часть связана лишь с витками той катушки, током которой наводится этот поток. Вторая часть магнитного потока, обусловленная током в данной катушке, называется потоком рассеяния. Следовательно, Φ_{s1} и Φ_{s2} есть потоки рассеяния соответственно первой и второй катушек.

Перечисленным магнитным потокам соответствуют следующие потокосцепления:

собственные потокосцепления первой и второй катушек

$$\psi_{11} = n_1 \Phi_{11},$$

$$\psi_{22} = n_2 \Phi_{22};$$

потокосцепления взаимной индукции, характеризующие связь между катушками

$$\psi_{12} = n_1 \Phi_{12},$$

$$\psi_{21} = n_2 \Phi_{21};$$

потокосцепления рассеяния

$$\psi_{s1} = n_1 \Phi_{s1},$$

$$\psi_{s2} = n_2 \Phi_{s2}.$$

При изменении токов i_1 и i_2 во времени изменяются также и потоки, создаваемые этими токами. Индуктивность каждой катушки, как известно, определяется отношением потокосцепления самоиндукции к току данной катушки

$$L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1};$$

$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}.$$

Взаимная индуктивность цепей определяется как

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}; \quad M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1}, \quad (36)$$

отношение потокоцепления взаимной индукции к току, создающему этот поток. Для линейных электрических цепей всегда выполняется равенство

$$M_{12} = M_{21} = M$$

и поэтому индексы у параметра взаимной индуктивности опускаются. В этом проявляется свойство взаимности для индуктивно связанных цепей: если ток, проходящий в первой цепи, создает потокоцепление взаимной индукции $n_2 \Phi_{21}$, то такой же ток, проходящий во второй цепи, создаст в первой цепи потокоцепление взаимной индукции $n_1 \Phi_{12}$ той же величины.

Выразим L_1 и L_2 через взаимную индуктивность M и индуктивность рассеяния. При этом индуктивность рассеяния определим как отношение потокоцепления рассеяния к току, создающему этот поток

$$\left. \begin{aligned} L_{s1} &= \frac{\Psi_{s1}}{i_1} ; \\ L_{s2} &= \frac{\Psi_{s2}}{i_2} \end{aligned} \right\} . \quad (37)$$

Теперь в выражения для L_1 и L_2 подставим значения Ψ_{11} и Ψ_{22} из уравнений (34) и (35)

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{n_1 \Phi_{11}}{i_1} = \frac{n_1 \Phi_{21} + n_1 \Phi_{s1}}{i_1} ; \\ L_2 &= \frac{\Psi_{22}}{i_2} = \frac{n_2 \Phi_{22}}{i_2} = \frac{n_2 \Phi_{21} + n_2 \Phi_{s2}}{i_2} , \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\Psi_{s1}}{i_1} + \frac{n_1}{n_2} \frac{n_2 \Phi_{21}}{i_1} = L_{s1} + nM ; \\ L_2 &= \frac{\Psi_{s2}}{i_2} + \frac{n_2}{n_1} \frac{n_1 \Phi_{12}}{i_2} = L_{s2} + \frac{M}{n} , \end{aligned}$$

где $n = \frac{n_1}{n_2}$ — отношение чисел витков первой и второй катушек.

Из последних выражений следует, что

$$\left. \begin{aligned} L_{s1} &= L_1 - nM ; \\ L_{s2} &= L_2 - \frac{M}{n} \end{aligned} \right\} . \quad (38)$$

Эти выражения нам понадобятся при рассмотрении схемы замещения трансформатора.

За меру индуктивной связи двух катушек принимают коэффициент связи k . Коэффициент связи определяют как среднее гео-

метрическое отношений потока взаимной индукции ко всему потоку катушки

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} \cdot \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}} . \quad (39)$$

Если выразить поток через L_1 , L_2 и M , то получим

$$k = \sqrt{\frac{M i_1 n_1}{n_2 L_1 i_1} \cdot \frac{M i_2 n_2}{n_1 L_2 i_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} . \quad (40)$$

Из формулы (39) видно, что коэффициент связи всегда меньше единицы (так как $\Phi_{21}/\Phi_{11} < 1$ и $\Phi_{12}/\Phi_{22} < 1$). Коэффициент связи возрастает с уменьшением потоков рассеяния Φ_{s1} и Φ_{s2} и стремится к единице, если $\Phi_{s1} \rightarrow 0$ и $\Phi_{s2} \rightarrow 0$.

Взаимная индуктивность M зависит от геометрических величин катушек g , определяющих их размеры, форму и взаимное расположение, а также от абсолютной магнитной проницаемости μ среды: $M = F(g, \mu)$. Если $\mu = \text{const}$, то $M = \mu f(g)$.

При изменении потока взаимной индукции, сцепляющегося со вторым контуром, в этом контуре возникает электродвижущая сила взаимной индукции. Поток Φ_{21} может изменяться либо вследствие изменения тока i_1 , либо вследствие изменения взаимной индуктивности M . В стационарных цепях $M = \text{const}$. Для этих цепей э. д. с. взаимной индукции равна

$$e_{21} = - \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - M \frac{di_1}{dt} . \quad (41)$$

Написанное выражение со знаком «минус» справедливо при любой ориентации катушек относительно друг друга, если принять, что M может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Если принять, что M всегда положительная величина, то для э. д. с. взаимной индукции следует писать

$$e_{21} = \mp \frac{d\Phi_{21}}{dt} = \mp M \frac{di_1}{dt} . \quad (42)$$

В настоящее время нельзя привести убедительных доводов в пользу какой-либо из двух точек зрения. Мы будем считать всегда $M > 0$. Однако вне зависимости от этого необходимо ввести понятие об одноименных зажимах катушек. Понятие об одноименных зажимах катушек вводится для того, чтобы не показывать на схемах намотку витков индуктивно связанных катушек. Одноименные зажимы определяются однозначно и не зависят от условно выбранных положительных направлений токов в катушках.

Два зажима индуктивно связанных катушек называются одноименными, если при одинаковом истинном направлении токов i_1 и i_2 относительно зажимов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке складываются. На рис. 48, а

и 48, б показаны индуктивно связанные катушки. На рис. 48, а намотки катушек выполнены в одном направлении. Буквами «н» и «к» обозначены начало и конец намотки каждой катушки. Одноименные зажимы отмечены точками. Аналогичным образом на рис. 48, б, где витки катушек намотаны в противоположных направлениях, одноименные зажимы также отмечены точками.

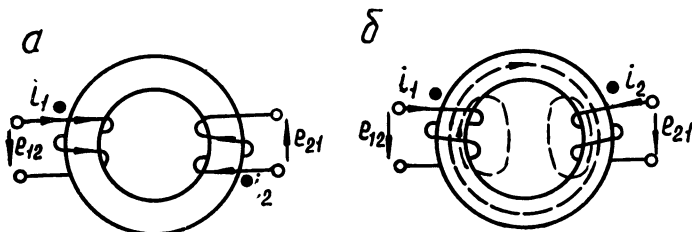


Рис. 48. Одноименные зажимы в индуктивно связанных катушках.

Положительные направления токов в обеих катушках всегда можно выбрать произвольно. При этом возможны два случая. Выбранные условно положительные направления токов будут одинаково ориентированы относительно одноименных зажимов (рис. 49, а). Такое направление токов будем называть согласным. Во втором случае выбранные направления токов будут ориентированы относительно одноименных зажимов различно (рис. 49, б). Такое направление токов будем называть встречным. Так как положительное направление э. д. с. взаимной индукции e_{12} , наводимой в катушке 1 током i_2 , принимается совпадающим с положительным направлением тока i_1 , то при согласном направлении токов i_1 и i_2 в формуле э. д. с. взаимной индукции имеется знак «минус». При этом положительное направление магнитного потока и наводимой э. д. с. взаимной индукции связано правилом правоугового винта.

$$e_{12} = - M \frac{di_2}{dt}; \quad (43)$$

$$e_{21} = - M \frac{di_1}{dt}.$$

При встречном направлении токов i_1 и i_2 в формуле э. д. с. взаимной индукции содержится знак «плюс». На рис. 49, а показаны положительные направления токов и э. д. с. взаимной индукции. Так как включение токов согласное, то

$$e_{21} = - M \frac{di_1}{dt}.$$

Рассмотрим случай, когда через катушку 1 проходит ток i_1 , причем $\frac{di_1}{dt} > 0$. Так как $M > 0$, то $e_{21} < 0$. В этом случае потенциал

зажима 2, одноименный с тем, в который входит ток i_1 , оказывается выше потенциала второго зажима катушки 2. Отсюда можно определить одноименные зажимы следующим образом. Два зажима

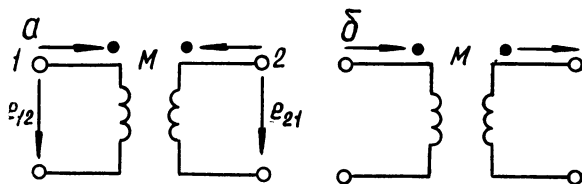


Рис. 49. Согласное (а) и встречное (б) направления токов.

называются одноименными, если при подведении к одной из катушек возрастающего по величине тока на одноименном зажиме второй катушки потенциал будет положительным.

Это определение можно положить в основу эксперимента по определению одноименных зажимов (рис. 50). Одна катушка подключается к источнику постоянного напряжения, а вторая — к вольтметру. Если в момент замыкания цепи $\frac{di_1}{dt} > 0$ источника

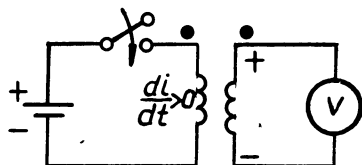


Рис. 50. Экспериментальное определение одноименных зажимов.

стрелка вольтметра отклонится в сторону положительных показаний, то зажимы, подключенные к положительному полюсу источника энергии и положительному зажиму измерительного прибора, являются одноименными.

Расчет цепей с взаимной индуктивностью. Теперь рассмотрим вопрос расчета цепей с взаимной индуктивностью. На рис. 51, а и б изображены неразветвленные индуктивно связанные цепи. Величину, обратную по знаку э. д. с. взаимной индукции, назовем падением напряжения и обозначим u_{12} и u_{21}

$$u_{12} = -e_{12} = \pm L \frac{di_2}{dt};$$

$$u_{21} = -e_{21} = \pm L \frac{di_1}{dt}.$$

Знак «плюс» берется при согласованном включении и знак «минус» при встречном. Составим по второму закону Кирхгофа уравнение

равновесия. Если учесть, что $i_1 = i_2 = i$, то при согласованном включении (рис. 51, а) будем иметь

$$\begin{aligned} r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} = \\ = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = u_{\text{сог}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Из полученного выражения можно сделать следующие выводы: две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при согласном направлении токов эквивалентны катушке,

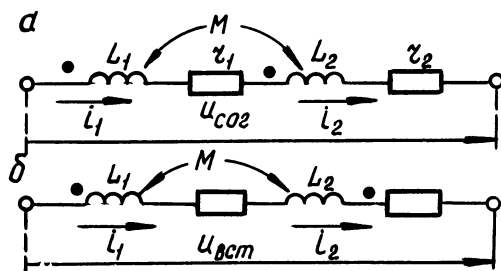


Рис. 51. Неразветвленная цепь с взаимной индуктивностью: согласное (а), встречное (б) включения.

имеющей активное сопротивление $r_1 + r_2$ и индуктивность $L_1 + L_2 + 2M$.

При встречном включении токов (рис. 51, б) уравнение равновесия будет иметь вид:

$$\begin{aligned} r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = \\ = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = u_{\text{вст}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из (45) следует, что две индуктивно связанные катушки, соединенные последовательно, при встречном направлении токов эквивалентны катушке, имеющей активное сопротивление $r_1 + r_2$ и индуктивность $L_1 + L_2 - 2M$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод. Если обход цепи совершается в положительном направлении тока, то при согласном направлении токов падение напряжения от взаимной индукции имеет знак «плюс», а при встречном — знак «минус».

Если линейная стационарная цепь при гармоническом воздействии находится в установившемся режиме, то можно для расчета

цепи с взаимной индукцией применять символический метод. В этом случае необходимо все уравнения записать для фазоров

$$e_{12} = -M \frac{di_2}{dt} \text{ или } \dot{E}_{12} e^{j\omega t} = -M \frac{d\dot{I}_2 e^{j\omega t}}{dt}.$$

Сокращая левую и правую части на оператор вращения, получаем

$$\dot{E}_{12} = -j\omega M \dot{I}_2,$$

аналогично

$$\dot{E}_{21} = -j\omega M \dot{I}_1.$$

Падение напряжения от взаимной индукции

$$\dot{U}_{12} = j\omega M \dot{I}_2,$$

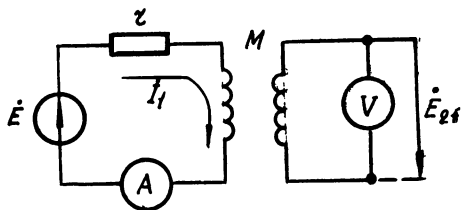


Рис. 52. Экспериментальное определение M .

где

$j\omega M$ — комплексное сопротивление взаимной индукции,

\dot{E}_{12} , \dot{E}_{21} , \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{U}_{12} — комплексные действующие значения.

Комплексные напряжения, соответствующие выражениям (44) и (45), запишутся так

$$[r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] \dot{I} = \dot{U}_{\text{сог}};$$

$$[r_1 + r_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)] \dot{I} = \dot{U}_{\text{вст}}.$$

Из этих двух уравнений можно легко определить M

$$M = \frac{X_{\text{сог}} - X_{\text{вст}}}{4\omega}, \quad (46)$$

где $X_{\text{сог}}$ — индуктивное сопротивление цепи при согласном включении;

$X_{\text{вст}}$ — то же при встречном включении.

Величину M экспериментально также можно определить из следующего выражения. Э. д. с. взаимной индукции на зажимах разомкнутой второй катушки (рис. 52) равна

$$\dot{E}_{21} = -j\omega M \dot{I}_1.$$

Это уравнение для модулей будет иметь вид

$$E_{21} = \omega M I_1,$$

отсюда

$$M = \frac{E_{21}}{\omega I_1}.$$

Амперметр в цепи первой катушки измеряет I_1 , вольтметр на зажимах второй катушки — E_{21} . Отсюда, зная ω , можно легко определить M .

В случае вынужденного экспоненциального воздействия выражения (44) и (45) будут иметь вид:

$$[r_1 + r_2 + p(L_1 + L_2 + 2M)] \dot{I} = \dot{U}_{\text{сог}};$$

$$[r_1 + r_2 + p(L_1 + L_2 - 2M)] \dot{I} = \dot{U}_{\text{вст}}.$$

Рассмотрим порядок расчета разветвленных цепей с взаимной индукцией (рис. 53). Заданными являются структура цепи и ее элементы и внешнее воздействие.

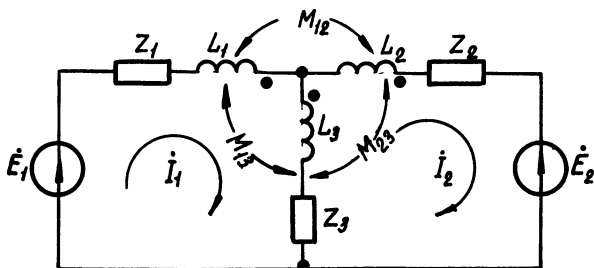


Рис. 53. Разветвленная цепь с взаимной индукцией.

На рис. 53 зажимы всех трех индуктивно связанных элементов обозначены одинаково, так как предполагается, что эти элементы имеют общий неразветвленный сердечник. Если три или большее число индуктивных элементов располагаются на разветвленном сердечнике, то необходимо одноименные зажимы каждой из пар индуктивно связанных элементов обозначать разными условными знаками. Искомыми являются токи в ветвях. Данную задачу можно решить путем непосредственного составления уравнений равновесия или методом контурных токов. Метод узловых напряжений в данном случае без эквивалентного преобразования цепи не применим. Это объясняется тем, что токи в ветвях зависят не только от напряжений между узлами, к которым они присоединены, но и от токов других ветвей, с которыми они связаны индуктивно.

Если через \dot{I}_1 и \dot{I}_2 обозначить контурные токи, то контурные уравнения запишутся так

$$\begin{aligned} Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 &= \dot{E}_1; \\ Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 &= -\dot{E}_2. \end{aligned}$$

Теперь определим собственные и общие сопротивления Z_{11} , Z_{22} , Z_{12} , Z_{21} . Собственное сопротивление Z_{11} определим как сопротивление первого контура при разомкнутом втором

$$Z_{11} = Z_1 + Z_3 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M_{13}).$$

Знак «минус» в выражении эквивалентной индуктивности взят в связи с тем, что L_1 и L_3 имеют встречное включение: ток \dot{I}_1 выходит из одноименного зажима индуктивности L_1 , а в одноименный зажим индуктивности L_3 он входит.

Собственное сопротивление Z_{22} определим как сопротивление второго контура при разомкнутом первом

$$Z_{22} = Z_2 + Z_3 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M_{23}).$$

Знак «плюс» в выражении эквивалентной индуктивности взят в связи с тем, что L_2 и L_3 имеют согласное включение: ток \dot{I}_2 одинаково ориентирован относительно одноименных зажимов.

Общее сопротивление Z_{12} равно

$$Z_{12} = -(Z_3 + j\omega L_3) + j\omega M_{13} - j\omega M_{23} + j\omega M_{12}.$$

Сопротивление взаимной индукции с M_{13} взято со знаком «плюс», так как токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 выходят из одноименных зажимов L_1 и L_3 , то есть включены согласно; с M_{23} — со знаком «минус», так как токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 относительно индуктивностей L_2 и L_3 включены встречно: ток \dot{I}_1 входит в одноименный зажим, а ток \dot{I}_2 выходит из одноименного зажима. Сопротивление взаимной индукции с M_{12} взято со знаком «плюс», так как токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 относительно индуктивностей L_1 и L_2 включены согласно. Общее сопротивление $Z_{12} = Z_{21}$. В этом можно убедиться непосредственно подсчетом. Решение уравнений дает токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 ; ток в поперечной ветви определяется как разность контурных токов $\dot{I}_1 - \dot{I}_2$.

Теорема о балансе активных и реактивных мощностей. Эта теорема в цепях с взаимной индукцией формулируется так же, как и для цепей без взаимной индукции. При этом под реактивной мощностью приемников энергии понимается сумма произведений квадратов токов ветвей, умноженных на реактивные сопротивления ветвей, подсчитанные без учета явления взаимной индукции, плюс алгебраическая сумма мощностей, переносимых магнитными потоками из одних ветвей в другие вследствие явления взаимной индукции. Подсчитываются без учета взаимоиндукции только реактивные сопротивления ветвей, токи же подсчитываются с учетом явления взаимоиндукции. Разберем на кон-

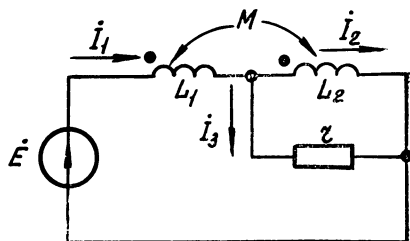


Рис. 54. К определению баланса мощностей в цепи с взаимной индукцией.

кретном примере теорему о балансе мощностей в цепях с взаимной индукцией. Источник цепи представлен на рис. 54.

Пример 8. Заданы источник э. д. с., структура и элементы цепи с взаимной индукцией. Требуется написать уравнение баланса мощностей.

Р е ш е н и е 1. Одним из методов определяем токи в цепи \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 . После этого определяем мощности.

2. Активная мощность, развиваемая источником э. д. с., равна

$$Re \dot{E} \dot{I}_1^*$$

3. Активная мощность, потребляемая приемником, равна

$$P = I_3^2 r.$$

4. Реактивная мощность источника э. д. с. равна

$$Im \dot{E} \dot{I}_1^*$$

5. Реактивная мощность приемников энергии равна

$$\begin{aligned} Im(\dot{U}_{L_1} \dot{I}_1^* + \dot{U}_{L_2} \dot{I}_2^*) &= Im \left[(\dot{I}_1 j \omega L_1 + j \omega M \dot{I}_2) \dot{I}_1^* + (j \omega L_2 \dot{I}_2 + j \omega M \dot{I}_1) \dot{I}_2^* \right] = \\ &= Im(j \omega L_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^* + j \omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^* + j \omega L_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^* + j \omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2^*), \end{aligned}$$

но

$$\dot{I}_1 \dot{I}_1^* = I_1 e^{j\alpha_1} I_1 e^{-j\alpha_1} = I_1^2.$$

Аналогично

$$\dot{I}_2 \dot{I}_2^* = I_2^2;$$

$$\begin{aligned} j \omega M (\dot{I}_2 \dot{I}_1^* + \dot{I}_1 \dot{I}_2^*) &= j \omega M (I_2 e^{j\alpha_2} I_1 e^{-j\alpha_1} + I_1 e^{j\alpha_1} I_2 e^{-j\alpha_2}) = \\ &= j \omega M I_1 I_2 (e^{-j(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}) = j \omega M I_1 I_2 2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Окончательно реактивная мощность приемников

$$\begin{aligned} Im(\dot{U}_{L_1} \dot{I}_1^* + \dot{U}_{L_2} \dot{I}_2^*) &= Im[j \omega L_1 I_1^2 + \omega L_2 I_2^2 + 2 \omega M I_1 I_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] = \\ &= \omega L_1 I_1^2 + \omega L_2 I_2^2 + 2 \omega M I_1 I_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

В соответствии с балансом мощностей должны выполняться равенства: для активных мощностей

$$Re \dot{E} \dot{I}_1^* = I_3^2 r;$$

для реактивных мощностей

$$Im \dot{E} \dot{I}_1^* = \omega L_1 I_1^2 + \omega L_2 I_2^2 + 2 \omega M I_1 I_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Из этого примера можно сделать следующие выводы:

1. Активная мощность определяется обычным способом. Взаимная индукция цепи влияет на активную мощность через токи в ветвях.

2. Реактивная мощность приемников равна сумме произведений квадратов токов ветвей, умноженных на реактивные сопротивления ветвей $\omega L_1 I_1^2 + \omega L_2 I_2^2$ плюс мощность, переносимая магнитными потоками из одной ветви в другую. Эта мощность равна $2\omega M I_1 I_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$. Она берется со знаком «плюс» при согласном включении и со знаком «минус» при встречном включении. Если в цепи имеется больше двух индуктивно связанных цепей, то берется алгебраическая сумма выражений $2\omega M_{ik} \times \times \cos(\alpha_i - \alpha_k)$ для попарно индуктивно связанных элементов. Здесь i и k индексы относятся к i -му и k -му индуктивно связанным элементам.

Следует обратить внимание на то, что на индуктивности как на реактивном элементе активная мощность не выделяется. Когда проверяют баланс мощностей, то при расчете на индуктивностях для активной мощности получают выражение вида $\pm \omega M I_1 I_k \sin(\alpha_i - \alpha_k)$. Эта мощность на одной индуктивности выделяется со знаком «плюс», на второй — со знаком «минус». Поэтому суммарная активная мощность на индуктивно связанных элементах всегда равна нулю.

§. 7. Линейный трансформатор. Уравнения и схемы замещения

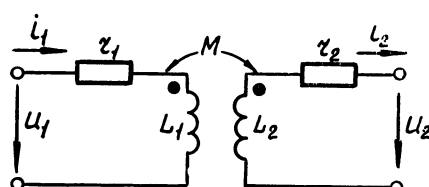
Трансформатор как изделие есть статический электромагнитный аппарат, предназначенный для преобразования величин переменных напряжений и токов. Трансформатор состоит из двух или большего числа индуктивно связанных катушек. Эти катушки называются обмотками. В простейшем случае трансформатор состоит из двух обмоток. Обмотка, к зажимам которой подключается источник энергии, называется первичной. Обмотка, к зажимам которой подключается нагрузка, называется вторичной. Соответственно напряжения и токи на зажимах этих обмоток называются первичными и вторичными.

Трансформатор называется линейным, если процессы, происходящие в нем, описываются линейными уравнениями. К линейным трансформаторам относятся трансформаторы с воздушным сердечником. Трансформаторы с ферромагнитным сердечником относятся к нелинейным. Однако и эти трансформаторы при небольших амплитудах могут быть заменены линейными трансформаторами.

Если не учитывать емкости, существующие как между витками каждой из обмоток, так и между самими обмотками и обмотками и

землей, то трансформатор можно представить в виде схемы (рис. 55), которая в основном правильно отражает процессы в реальном трансформаторе. Активные сопротивления обмоток на схеме условно вынесены и изображены отдельно.

Уравнения трансформатора есть уравнения равновесия, записанные по второму закону Кирхгофа



$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= u_1; \\ r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= -u_2 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Рис. 55. Трансформатор без ферромагнитного сердечника.

Если напряжение u_1 синусоидально, то при установившемся режиме синусоидальными функциями времени будут также i_1 , i_2 и u_2 и уравнение трансформатора (47) можно записать в комплексной форме

$$\left. \begin{aligned} (r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U}_1; \\ -j\omega M \dot{I}_1 + (r_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 &= -\dot{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

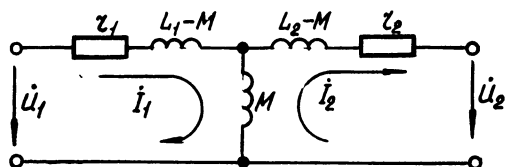


Рис. 56. Схема замещения линейного трансформатора.

Уравнения (47) и (48) не являются контурными уравнениями. Это уравнения равновесия. Эти уравнения можно привести к контурным. Для этого нужно их заменить равносильными:

$$\left. \begin{aligned} [r_1 + j\omega (L_1 - M) + j\omega M] \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U}_1; \\ -j\omega M \dot{I}_1 + [r_2 + j\omega (L_2 - M) + j\omega M] \dot{I}_2 &= -\dot{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Последние уравнения являются контурными уравнениями. Им соответствует схема рис. 56. Эта схема называется схемой замещения линейного трансформатора. Характерной особенностью схемы замещения является то, что в ней отсутствуют индуктивные связи.

Замена индуктивно связанных цепей схемой замещения, в которой отсутствуют индуктивные связи, иногда называется методом развязки индуктивных связей.

зей находит применение в практике расчета цепей. Схема без индуктивных связей дает возможность применить метод узловых напряжений в цепи со взаимной индуктивностью. Схема замещения трансформатора есть его расчетный эквивалент. К особенностям этой схемы относятся:

1. При неравных значениях L_1 и L_2 одна из разностей ($L_1 - M$ или $L_2 - M$) может оказаться отрицательной. В этом случае схема замещения может быть практически осуществлена только при фиксированной частоте, на которой отрицательная индуктивность мо-

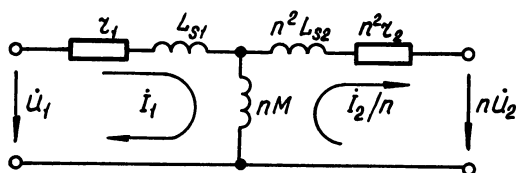


Рис. 57. Приведенная схема замещения трансформатора.

жет быть замещена емкостным элементом; в полосе частот в линейных пассивных цепях отрицательная индуктивность физически нереализуема.

2. В самом общем случае входящие в схему замещения разности $L_1 - M$ и $L_2 - M$ не имеют физического смысла. Только при одинаковом числе витков первичной и вторичной обмоток ($n_1 = n_2$) они представляют собой индуктивности рассеяния L_{s1} и L_{s2} .

Эти особенности схемы замещения можно устранить, если воспользоваться приведенной схемой замещения трансформатора (рис. 57). Смысл приведения заключается в том, что напряжение \dot{U}_2 и ток \dot{I}_2 заменяются величинами, приведенными к первичной обмотке: напряжение \dot{U}_2 умножается на n , а ток \dot{I}_2 делится на n , где n — коэффициент трансформации $n = \frac{n_1}{n_2}$.

Для приведения в уравнениях равновесия (48) \dot{I}_2 поделим на n , а \dot{U}_2 умножим на n .

$$(r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 - j\omega n M \frac{\dot{I}_2}{n} = \dot{U}_1;$$

$$n^2 (r_2 + j\omega L_2) \frac{\dot{I}_2}{n} - j\omega n M \dot{I}_1 = -n \dot{U}_2.$$

Теперь преобразуем их в контурные уравнения

$$\begin{aligned} [r_1 + j\omega(L_1 - nM)] \dot{I}_1 + j\omega nM \dot{I}_1 - j\omega nM \frac{\dot{I}_2}{n} &= \dot{U}_1; \\ -j\omega nM \dot{I}_1 + j\omega nM \frac{\dot{I}_2}{n} + n^2 \left[r_2 + j\omega \left(L_2 - \frac{M}{n} \right) \right] \frac{\dot{I}_2}{n} &= -n\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (50)$$

В этом математическом выражении все физические величины имеют ясный физический смысл: $L_{s1} = L_1 - nM$ — индуктивность рассеяния первичной обмотки; $L_{s2} = L_2 - \frac{M}{n}$ — индуктивность рассеяния вторичной обмотки. Поперечная ветвь приведенной схемы замещения называется ветвью намагничивания. При приведении сопротивления r_2 и L_{s2} умножаются на n^2 . Индуктивные сопротивления ωL_{s1} и ωL_{s2} представляют собой сопротивления рассеяния первичной и вторичной обмоток; индуктивное сопротивление $n\omega M$ есть сопротивление ветви намагничивания. Намагничивающая сила, определяющая общий магнитный поток при встречном направлении токов, равна $i_1 n_1 - i_2 n_2 = (i_1 - i_2/n) n_1$. Ток в ветви намагничивания, записанный в

комплексной форме $\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n}$, принято называть намагничивающим током.

На рис. 58 изображена фазорная диаграмма, соответствующая уравнениям (50), то есть приведенной схеме замещения. Построение фазорной диаграммы начнем с приведенных тока и напряжения вторичной обмотки. Вдоль действительной оси от-

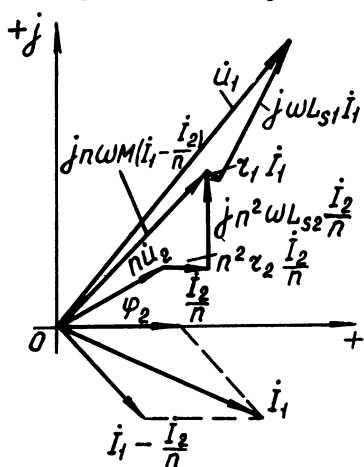


Рис. 58. Фазорная диаграмма приведенной схемы замещения.

ложим фазор тока \dot{I}_2/n . Фазор напряжения $n\dot{U}_2$ отложим в сторону опережения на угол φ_2 . Величина угла определяется током нагрузки. Если фазор $n\dot{U}_2$ опережает $\frac{\dot{I}_2}{n}$, то нагрузка есть последовательное соединение сопротивления Z_n и индуктивности L_n . Теперь последовательно отложим все фазоры напряжения второго контура. Фазор $n^2 r_2 \frac{\dot{I}_2}{n}$ откладывается параллельно фазору тока $\frac{\dot{I}_2}{n}$. Перпендикулярно к нему откладывается фазор напряжения

$jn^2\omega L_{s2} \frac{\dot{I}_2}{n}$. Если конец этого фазора соединить с началом координат, то мы получим фазор напряжения на ветви намагничивания $-jn\omega M \left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n} \right)$. Противоположный ему фазор напряжения $jn\omega M \left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n} \right)$ есть фазор напряжения ветви намагничивания в первом контуре. Перпендикулярно к этому фазору с отставанием откладывается фазор тока намагничивания $\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n}$. Фазор тока \dot{I}_1 равен геометрической сумме фазоров тока $\frac{\dot{I}_2}{n}$.

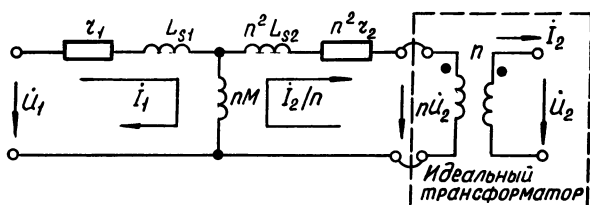


Рис. 59. Эквивалентная схема трансформатора.

и $\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n}$. С конца фазора напряжения $jn\omega M \left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{I}_2}{n} \right)$ откладываем параллельно фазору тока \dot{I}_1 фазор напряжения $r_1 \dot{I}_1$ и перпендикулярно к последнему с опережением откладываем фазор напряжения $j\omega L_{s1} \dot{I}_1$. Фазор, проведенный от начала координат к фазору $j\omega L_{s1} \dot{I}_1$, есть фазор входного напряжения \dot{U}_1 .

Приведенная схема трансформатора не является его эквивалентной схемой, так как приведенные ток $\frac{\dot{I}_2}{n}$ и напряжение $n\dot{U}_2$ не равны току \dot{I}_2 и напряжению \dot{U}_2 исходной схемы. Для получения эквивалентной схемы воспользуемся понятием об идеальном трансформаторе. Идеальным трансформатором называется трансформатор, обладающий следующими свойствами: а) отсутствием потерь энергии $r_1=r_2=0$; б) отсутствием индуктивности рассеяния $L_{s1}=L_{s2}=0$, $L_1=nM$, а $L_2=\frac{M}{n}$, откуда коэффициент связи такого трансформатора равен единице; в) отсутствием тока в первичной обмотке при разомкнутой вторичной. Это трансформатор с бесконечно большим сопротивлением ветви намагничивания.

Если трансформатор обладает такими свойствами, то при любых условиях отношение первичного напряжения ко вторичному на зажимах идеального трансформатора равно отношению вторичного тока к первичному

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = n.$$

На рис. 59 приведенная схема замещения дополнена идеальным трансформатором с коэффициентом трансформации n . Эта схема может быть названа эквивалентной схемой трансформатора.

Определим входное сопротивление трансформатора, нагруженного на сопротивление Z_H (рис. 60). Уравнение равновесия

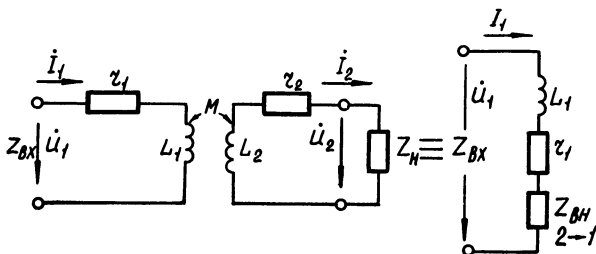


Рис. 60. Определение входного сопротивления трансформатора.

$$(r_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1;$$

$$\pm j\omega M \dot{I}_1 + (r_2 + j\omega L_2 + Z_H) \dot{I}_2 = 0.$$

Отсюда

$$\dot{I}_2 = \frac{\mp j\omega M \dot{I}_1}{r_2 + j\omega L_2 + Z_H}.$$

Входное сопротивление:

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = r_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{r_2 + j\omega L_2 + Z_H} = Z_H + Z_{BH} \quad (51)$$

Третье слагаемое в правой части представляет собой сопротивление, вносимое из вторичной цепи в первичную

$$Z_{BH} = \frac{(\omega M)^2}{r_2 + j\omega L_2 + Z_H}. \quad (52)$$

Если нагрузка присоединена к идеальному трансформатору, то

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n \dot{U}_2}{\dot{I}_2 / n} = n^2 Z_H. \quad (53)$$

Следовательно, идеальный трансформатор, включенный между нагрузкой и источником энергии, изменяет сопротивление нагрузки в n^2 раз без изменения его аргумента. Это свойство трансформатора используется для согласования внутреннего сопротивления источника с сопротивлением нагрузки.

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

§ 1. Системный подход к изучению явлений природы. Система

Подход к объектам исследования как к системам выражает одну из главных особенностей современного научного познания. Этот подход получил широкое распространение в связи с развитием теории управления и изобретением универсальной цифровой машины. Влияние теории систем и системного подхода начинают испытывать на себе традиционные научные направления и учебные дисциплины. Развитие теории и практики управления, а также цифровых машин пробудило интерес к классическим методам фазового пространства для анализа систем, что, в свою очередь, привело к появлению новых идей и методов, концентрирующихся вокруг понятия состояния. Метод переменных состояния, или, что одно и то же, метод пространства состояний является наиболее адекватным математическим аппаратом при анализе систем.

Каждая система есть совокупность элементов, связанных какими-либо формами взаимодействия или взаимозависимости и выступающих как единое целое. Свойства системы вытекают из связей между частями системы. В свою очередь, связи определяют возможность получать и передавать воздействие. Процессы в системах в большей мере определяются преобразованиями информации, чем взаимопревращением вещества и энергии. Тенденция исследовать системы как единое целое, а не как конгломерат элементов, соответствует тенденции современной науки не изолировать исследуемые явления, а изучать их прежде всего во взаимодействии. Системный подход необходим для достижения более высокой степени обобщения, чем это позволяет сделать, например, теория цепей.

Каждая система характеризуется тремя взаимно связанными между собой сторонами: структурой, функцией и состоянием. Структура системы — совокупность отношений и связей между ее частями. Функция системы — некоторый стабильный, характерный для данной системы способ поведения; это совокупность ее реакций на внешнее воздействие. Функция системы является одной из важнейших сторон сущности системы. С качественной стороны под состоянием системы понимается множество ее существенных

свойств. Существенные свойства в своих конкретных проявлениях образуют состояние системы. Смена состояний есть поведение системы. Заданное входное действие и внутреннее состояние системы вместе определяют некоторое выходное действие и определенный переход из данного состояния в другое. Внутреннее состояние определяется наличием у системы памяти, которая, в свою очередь, становится возможной из-за наличия накопителей энергии и их взаимодействия.

С количественной стороны каждый объект, являющийся частью системы, характеризуется конечным числом измеряемых величин, а взаимодействие между такими объектами, а также взаимосвязь между величинами в каждом объекте выражается в некоторой четко определенной математической форме.

§ 2. Пример анализа систем методом переменных состояния (одномерный случай). Каноническая форма уравнений состояния

Для введения неформальным путем некоторых основных понятий теории систем и метода переменных состояния рассмотрим rC цепь, возбуждаемую источником э. д. с. (рис. 61).

При анализе данной цепи используем системный подход. К измеримым свойствам данной системы относим ток и напряжение в ветвях и узлах цепи, а также их производные и интегралы. Однако не все эти величины для нас представляют одинаковый интерес. Кроме того, не все они являются независимыми величинами. При любом способе задания характеристик системы следует искать минимальное математическое описание, которое приводит к пониманию работы устройства и его эффективному использованию.

Качественно под состоянием системы будем понимать минимальное количество информации, необходимое в произвольный момент времени для того, чтобы полностью описать любое возможное поведение системы в будущем.

В контуре, состоящем из емкости и сопротивления, состояние системы полностью определяется одной переменной величиной. Если за переменную состояния выбрать ток в цепи, то напряжения на сопротивлении и на емкости определяются однозначно. Можно задать напряжение на сопротивлении U_r . Тогда однозначно определится ток в цепи и напряжение на емкости. Если задать напряжение на емкости u_C , то однозначно определится ток в цепи и напряжение на сопротивлении. Таким образом, за переменную состояния можно выбрать любую из трех величин: $i(t)$, $u_C(t)$ или $u_r(t)$. За состояние цепи примем напряжение на емкости $u_C(t)$. Источник э. д. с. примем за вход цепи. При этом под входом цепи будем понимать внешнее воздействие, которое переводит систему из одного состояния в другое. Это внешнее воздействие будем также

называть управляющим воздействием. Задача об управлении и есть задача об определении управляющих сил, которые переводят динамическую систему в заданное состояние. Под динамической системой будем понимать систему, описываемую дифференциальным уравнением. Такая система обязательно содержит накопители энергии, то есть емкости и индуктивности.

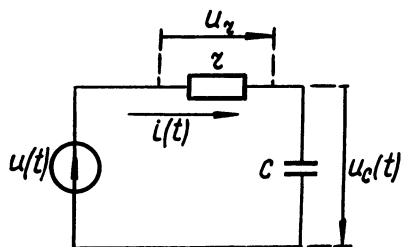


Рис. 61. Последовательная rC цепь, возбуждаемая источником э. д. с.

Ток в цепи $i(t)$ примем за отклик или выход системы. В данную систему входят два объекта или элемента: сопротивление r и емкость C . Для свойств элементов r и C справедливы следующие соотношения

$$u_r = ri; \quad (54)$$

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt}. \quad (55)$$

В свою очередь, взаимодействие между элементами можно записать в форме

$$ri + u_c = u \quad (56a)$$

$$rC \frac{du_c}{dt} + u_c = u. \quad (56b)$$

Разрешим эти уравнения относительно производной переменной состояния u_c и выхода i .

$$\dot{u}_c = -\frac{1}{rC}u_c + \frac{1}{rC}u; \quad (57)$$

$$i = -\frac{1}{r}u_c + \frac{1}{r}u. \quad (58)$$

Введем следующие обозначения для коэффициентов при u_c и u :

$$A = -\frac{1}{rC}; \quad B = \frac{1}{rC}; \quad C = -\frac{1}{r}; \quad D = \frac{1}{r}.$$

Тогда выражения (57) и (58) принимают вид:

$$\dot{u}_c = Au_c + Bu; \quad (59a)$$

$$i = Cu_c + Du. \quad (59b)$$

Уравнения (59) назовем уравнениями состояния в канонической форме. Найдём решение уравнений (59). Полное решение урав-

нения (59а) будет равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$u_C = u_{C\text{св}} + u_{C\text{пр}}, \quad (60)$$

где $u_{C\text{св}}$ — общее решение однородного уравнения;

$u_{C\text{пр}}$ — частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим однородные уравнения для стационарной цепи.

$$\dot{u}_{C\text{св}} = Au_{C\text{св}} \quad \text{или} \quad \frac{du_{C\text{св}}}{dt} = Au_{C\text{св}}. \quad (61)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int_{u_C(t_0)}^{u_C(t)} \frac{du}{u} = A \int_{t_0}^t dt; \quad \ln u_C(t) - \ln u_C(t_0) = A(t - t_0),$$

откуда общее решение однородного уравнения запишем в форме

$$u_C(t) = e^{A(t-t_0)} u_C(t_0). \quad (62)$$

Введем обозначение

$$e^{A(t-t_0)} = \varphi(t - t_0).$$

Тогда

$$u_C(t) = \varphi(t - t_0) u_C(t_0). \quad (63)$$

Теперь найдем методом вариаций частное решение неоднородного уравнения. Решение будем искать в форме

$$u_{C\text{пр}} = \varphi(t - t_0) u_{\text{пр}}(t) u_C(t_0).$$

При этом полное решение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{C\text{св}} + u_{C\text{пр}} = \varphi(t - t_0) u_C(t_0) + \varphi(t - t_0) u_{\text{пр}}(t) u_C(t_0) = \\ &= \varphi(t - t_0) [1 + u_{\text{пр}}(t)] u_C(t_0) = \varphi(t - t_0) z(t), \end{aligned} \quad (64)$$

где t_0 — постоянная величина, а $z(t)$ следует определить.

Для определения $z(t)$ подставим (64) в (59а)

$$\dot{\varphi}(t - t_0) z(t) + \varphi(t - t_0) \dot{z}(t) = A\varphi(t - t_0) z(t) + Bu,$$

или после группирования

$$[\dot{\varphi}(t - t_0) - A\varphi(t - t_0)] z(t) + \varphi(t - t_0) \dot{z}(t) = Bu. \quad (65)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. В самом деле, из уравнения (63) следует

$$u_{C\text{св}} = \varphi(t - t_0) u_C(t_0);$$

$$\dot{u}_{C\text{св}} = \dot{\varphi}(t - t_0) u_C(t_0).$$

Если значения $u_{C\text{св}}$ и $\dot{u}_{C\text{св}}$ подставить в однородное уравнение (61), то получим

$$\dot{\varphi}(t - t_0) u_C(t_0) - A\varphi(t - t_0) u_C(t_0) = 0,$$

то есть $\varphi(t - t_0)$ есть решение однородного уравнения.

Поэтому из выражения (65) следует

$$\dot{z}(t) = \varphi^{-1}(t - t_0) B u(t).$$

Интегрируя это выражение от t_0 до t , получаем

$$z(t) - z(t_0) = B \int_{t_0}^t \varphi^{-1}(\xi - t_0) u(\xi) d\xi. \quad (66)$$

Но из уравнения (64) следует

$$\begin{aligned} z(t) &= u_C(t) \cdot \varphi^{-1}(t - t_0); \\ z(t_0) &= u_C(t_0) \varphi^{-1}(0), \end{aligned}$$

поэтому

$$\varphi^{-1}(t - t_0) u_C(t) = \varphi^{-1}(0) u_C(t_0) + B \int_{t_0}^t \varphi^{-1}(\xi - t_0) u(\xi) d\xi. \quad (67)$$

учитывая, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t - t_0) \varphi^{-1}(\xi - t_0) = e^{A(t-t_0)} e^{A(t_0-\xi)} = e^{A(t-\xi)} = \varphi(t - \xi)$ и, умножая обе части равенства (67) на $\varphi(t - t_0)$, окончательно получаем

$$u_C(t) = \varphi(t - t_0) u_C(t_0) + B \int_{t_0}^t \varphi(t - \xi) u(\xi) d\xi,$$

или

$$u_C(t) = e^{A(t-t_0)} u_C(t_0) + B \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi)} u(\xi) d\xi. \quad (68)$$

Выражение для тока (выхода) будет иметь вид

$$i = C \varphi(t - t_0) u_C(t_0) + BC \int_{t_0}^t \varphi(t - \xi) u(\xi) d\xi + Du,$$

или

$$i = C e^{A(t-t_0)} u_C(t_0) + BC \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi)} u(\xi) d\xi + Du. \quad (69)$$

Если в уравнения (68) и (69) подставить значения коэффициентов A , B , C , D , то получаем:

$$u_C(t) = e^{-\frac{1}{rC}(t-t_0)} u_C(t_0) + \frac{1}{rC} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{rC}(t-\xi)} u(\xi) d\xi, \quad (70)$$

$$i(t) = -\frac{1}{r} e^{-\frac{1}{rC}(t-t_0)} u_C(t_0) - \frac{1}{r^2 C} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{rC}(t-\xi)} u(\xi) d\xi + \frac{1}{r} u. \quad (71)$$

Уравнения (70) и (71) являются уравнениями состояния, вход — выход — состояние цепи (см. рис. 61) в канонической форме.

На данном примере отметим основные особенности системного подхода.

1. Для анализа системы вводится понятие о переменных состояния, через которые устанавливаются основные свойства элементов (уравнения (54) и (55)).

2. В математической форме выражается взаимодействие между различными элементами в виде соотношений между их свойствами (уравнение (56)).

3. Составляются уравнения связи между свойствами, изменяемыми экспериментатором (входы) и свойствами, которые наблюдаются, но непосредственному измерению не подлежат (выходы) (уравнение (59б)).

При системном подходе источники энергии рассматриваются как управляющие силы, переводящие систему из одного состояния в другое.

§ 3. Составление системы дифференциальных уравнений в нормальной форме методом переменных состояния. Векторная каноническая форма уравнений состояния

Рассмотрим более сложный пример на составление системы дифференциальных уравнений методом переменных состояния. Для этого рассмотрим цепь с двумя независимыми накопителями энергии (рис. 62).

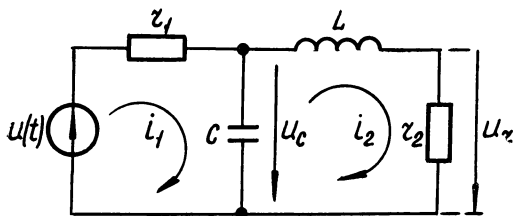


Рис. 62. Цепь второго порядка.

Для сравнения двух методов: классического и метода переменных состояния составим дифференциальное уравнение по закону Кирхгофа. Непосредственно из рис. 62 следует

$$r_1 i_1 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt = u;$$

$$r_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt = 0.$$

После дифференцирования полученной системы уравнений и исключения переменных i_2 и i_1 можно составить одно дифференциальное уравнение второго порядка относительно напряжения u_r

$$\frac{d^2 u_r}{dt^2} + \left(\frac{r^2}{L} + \frac{1}{r_1 C} \right) \frac{du_r}{dt} + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) u_r = \frac{1}{LC} \frac{r_2}{r_1} u.$$

Если решить данное уравнение, то можно определить u_r как функцию входного напряжения и начальных условий. Однако полученное решение не содержит в явном виде информацию о состоянии системы.

Для записи уравнений методом переменных состояния напряжение источника э. д. с. $u(t)$ принимаем за вход системы, напряжение на сопротивлении r_2 за выход системы. В данную систему входят четыре элемента: L , C , r_1 и r_2 . Взаимодействие этих элементов определяется структурой системы. В качестве переменных состояния следует выбрать минимальное число переменных. В то же время эти переменные должны полностью определять систему на отрезке наблюдения. В качестве таких переменных состояния следует выбирать величины, которые характеризуют энергию, запасенную в системе, так как состояние системы может быть охарактеризовано этой энергией, а сама информация передается через ее изменения. Величина энергии определяется током в индуктивности и напряжением на емкости. Поэтому в качестве переменных состояния выберем именно эти величины, то есть ток i_2 и напряжение u_C . Эти величины независимы. Для свойств элементов L , C и r справедливы следующие соотношения:

$$u_L = L \frac{di_2}{dt};$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt};$$

$$u_r = r_2 i_2$$

Взаимодействия между элементами системы запишутся в следующей форме

$$L \frac{di_2}{dt} = -r_2 i_2 + u_C;$$

$$C \frac{du_C}{dt} = i_1 - i_2 = \frac{u}{r} - \frac{u_C}{r} - i_2;$$

$$u_r = r_2 i_2.$$

Разрешая эти уравнения относительно производных переменных состояния, получаем:

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{r_2}{L} i_2 + \frac{1}{L} u_C + 0 \cdot u; \quad (72)$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_2 - \frac{1}{rC} u_C + \frac{1}{rC} u; \quad (73)$$

$$u_r = r_2 i_2 + 0 \cdot u_C + 0 \cdot u. \quad (74)$$

Уравнения (72) и (73) описывают поведение системы. Эти уравнения представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Система дифференциальных уравнений называется линейной, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных. Система линейных уравнений первого порядка в общем случае, записанная в нормальной форме, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (75)$$

или в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad (76)$$

где \mathbf{x} — n -мерный вектор с координатами $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ и \mathbf{f} — n -мерный вектор с координатами $f_1(t), f_2(t) \dots, f_n(t)$ соответственно, которые удобно рассматривать как матрицы:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

Согласно правилу умножения матриц строка первого множителя должна умножаться на столбец второго, следовательно

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + f_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j + f_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j + f_n \end{pmatrix}$$

Равенство матриц означает равенство их соответствующих элементов, следовательно, одно матричное уравнение (76), или

$$\left\| \begin{array}{c} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + f_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j + f_n \end{array} \right\|$$

эквивалентно системе (75).

Определим линейный оператор H равенством

$$H[x] = \frac{dx}{dt} - Ax,$$

тогда уравнение (76) еще короче можно записать в виде

$$H[x] = f. \quad (77)$$

Если все $f_i(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) или, что то же самое, матрица $f = 0$, то система (75) называется линейной однородной. В краткой записи линейная однородная система имеет вид

$$H[x] = 0. \quad (78)$$

Таким образом, уравнения (72) и (73) можно записать в матричной форме

$$\left\| \begin{array}{c} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{r_2}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{rC} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} i_2 \\ u_C \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{rC} \end{array} \right\| \|u\| \quad (79)$$

В свою очередь, матрицы будут иметь вид

$$x = \left\| \begin{array}{c} i_2 \\ u_C \end{array} \right\|, \quad f = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{rC} \end{array} \right\| \|u\| = B \|u\|,$$

где через B обозначена матрица — столбец

$$B = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{rC} \end{array} \right\|,$$

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{r_2}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{rC} \end{array} \right\|, \quad \frac{dx}{dt} = \left\| \begin{array}{c} \frac{di_2}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\|.$$

Уравнения состояния запишутся в форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (80)$$

Для того, чтобы записать уравнения состояния в канонической форме, необходимо к выражению (80) добавить уравнение, связы-

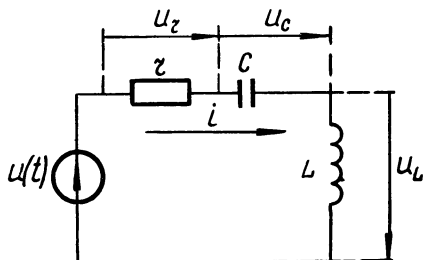


Рис. 63. Последовательный rLC контур.

вающее вход и выход системы. В нашем случае оно имеет вид уравнения (74), которое в матричной форме запишется как

$$\|u_r\| = \|r_2 \ 0\| \begin{Bmatrix} i \\ u_C \end{Bmatrix} + \|0\| \cdot \|u\|$$

или

$$\|u_r\| = Cx + Du, \quad (81)$$

где

$$C = \|r_2 \ 0\| \quad \text{и} \quad D = 0.$$

Пример 9. Составить уравнение состояния и уравнение вход — выход — состояние для последовательного контура (рис. 63).

Решение. За переменные состояния принимаем ток в цепи i и напряжение на емкости u_C . Тогда взаимодействие между элементами запишется в форме

$$\frac{di}{dt} = -\frac{r}{L}i - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}u;$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i.$$

В матричной форме система дифференциальных уравнений записывается

$$\begin{Bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} i \\ u_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \|u\|$$

Для составления уравнения вход — выход — состояние за вход примем э. д. с. источника, а за выход системы напряжение на L . Тогда

$$u_L = -ri - u_C + u.$$

Или в матричной форме

$$\|u_L\| = \|-r - 1\| \left\| \begin{matrix} i \\ u_C \end{matrix} \right\| + \|1\| \cdot \|u\|.$$

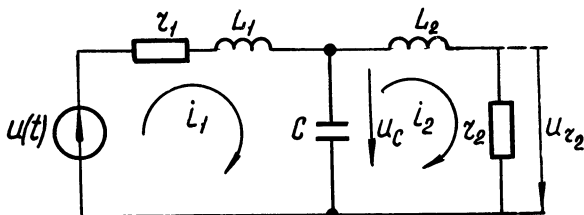


Рис. 64. Цепь третьего порядка.

Пример 10. Составить уравнения состояния в канонической форме для цепи рис. 64.

Решение. За переменные состояния принимаем токи в индуктивностях L_1 и L_2 и напряжение на емкости u_C . Тогда взаимодействие между элементами запишется в виде

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_C = u;$$

$$u_C + L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 = 0;$$

$$C \frac{du_C}{dt} = i_1 - i_2.$$

Или, разрешая эти уравнения относительно первых производных переменных состояния, получаем:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{r_1}{L_1} i_1 + 0 \cdot i_2 - \frac{1}{L_1} u_C + \frac{u}{L_1};$$

$$\frac{di_2}{dt} = 0 \cdot i_1 - \frac{r_2}{L_2} i_2 - \frac{1}{L_2} u_C + 0 \cdot u$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2 + 0 \cdot u_C + 0 \cdot u.$$

В матричной форме уравнения состояния будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{r_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \|u\|$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

где x , $\frac{dx}{dt}$, B — вектор-столбцы, A — квадратная матрица

$$x = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_C \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{r_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}$$

Для составления уравнения связи за вход системы примем э. д. с. источника u , за выход — напряжение u_{r_2} . Тогда

$$u_{r_2} = i_2 r_2 = i_1 0 + i_2 r_2 + 0 \cdot u_C + 0 \cdot u.$$

В матричной форме

$$\|u_{r_2}\| = \|0 \ r_2 \ 0\| \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_C \end{pmatrix} + 0 \|u\|.$$

Или окончательно в векторной форме

$$u_{r_2} = Cx + Du,$$

где C матрица, вектор-строка

$$C = \|0 \ r_2 \ 0\|, \quad a \quad D = 0.$$

Окончательно уравнения состояния в канонической форме запишутся в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx; \quad y = Cx + Du.$$

Здесь через y для общего случая обозначен выход системы. В рассматриваемом примере $y = u_r$.

§ 4. Основные понятия теории систем. Состояние

Рассмотренные примеры позволяют каждой системе приписать некоторое число свойств, соответствующих целям ее использования. Эти свойства характеризуются набором чисел или множеством переменных вместе с отношениями между ними. Для обозначения системы введем букву A . Переменные, связанные с системой, назовем основными переменными. Основные переменные будем предполагать изменяющимися во времени. Обозначим их через v_1, v_2, \dots, v_N . Минимальное число основных переменных v , полностью характеризующих состояние системы, назовем переменными состояния. Переменные состояния будем обозначать через $x_i(t)$. Для удобства переменные $x_i(t)$ будем рассматривать как компоненты n -мерного вектора.

Если система A определяется без каких-либо указаний на входные (причины) или выходные (следствия) переменные, то A будем называть неориентированной системой. Если основные переменные подразделены на две группы — входные переменные и выходные переменные — играющие роль независимых и зависимых переменных, то A будем называть ориентированной системой. Входные величины — это независимые переменные, которые по нашему усмотрению могут изменяться.

Набор этих величин в дальнейшем будем обозначать через u_1, u_2, \dots, u_k и назовем входным вектором u . Набор зависимых переменных, который наблюдает экспериментатор, обозначим через y_1, y_2, \dots, y_m и назовем выходным вектором y . Среди основных переменных могут оказаться такие, на которые не обращается внимание. Эти величины назовем скрытыми выходными величинами. При изменении входного вектора u и наблюдении за выходным вектором y экспериментатор может получить множество соотношений вида

$$A(u, y) = 0 \quad (82)$$

Соотношение (82), устанавливающее связь между входным и выходным векторами, будем называть уравнением вход — выход системы.

Пример 11. Предположим, что напряжение на емкости есть выход, а ток через емкость — вход. Тогда уравнение вход — выход запишется в форме

$$C \frac{du_c}{dt} = i, \quad (83)$$

или

$$A(i, u_c) = 0.$$

Теперь можно более строго ввести понятие о системе. Под однородной ориентированной абстрактной системой будем понимать множество $A = \{(u_T, y_T)\}$ упорядоченных пар функций времени (u_T, y_T) , определенное на множестве T временной оси. В соответствии с этим определением данному входу u соответствует множество различных y , которые определяются различными начальными условиями, или начальными состояниями.

Один из способов связать единственным образом значение y с каждым значением u состоит в приписывании каждой паре вход — выход (u, y) некоторого параметра $x(t_0)$, такого, что y будет однозначно определяться значением u и $x(t_0)$. Этот процесс будем понимать как процесс параметризации пространства пар вход — выход и назовем $x(t_0)$ состоянием системы A в момент t_0 . Для процесса параметризации необходимо ответить на вопрос: что нужно знать об истории системы до момента t_0 для однозначного определения $y(t_0, t_1]$ при заданном $u(t_0, t]$? Здесь через $(t_0, t]$ обозначен полуинтервал наблюдения. В теории дифференциальных уравнений показано, что для систем, описываемых этими уравнениями, знание определенного конечного числа производных входа и выхода в момент t_0 дает всю информацию о прошлой истории системы, что является достаточным для определения $y(t_0, t_1]$. Таким образом, в случае подобных систем состояние в момент t_0 является вектором, компонентами которого будут производные различных порядков входа и выхода A . Это значит, что количественно состояние представляет набор независимых начальных условий или невырожденное их линейное преобразование. Основное свойство состояния системы A в момент t_0 заключается в «отделении будущего ($t > t_0$) от прошедшего» ($t < t_0$) в том смысле, что последнее несет всю информацию о прошлом объекте, необходимую для определения реакции на любой вход, начинающийся в момент t_0 .

Если через $x(t_0)$ обозначить вектор состояния системы в момент t_0 и предположить, что пространство пар вход — выход системы A допускают параметризацию в форме уравнения

$$y(t) = A(x(t_0), U_{(t_0, t)}) \quad \forall t > t_0, \quad \forall t_0, \quad (84)$$

то это уравнение называется уравнением вход — выход — состояние системы A .

Еще раз подчеркиваем, что $x(t_0)$ есть начальное состояние системы A в момент t_0 . Компоненты $x(t)$ будем называть переменными состояния системы A .

Пример. 12. Абстрактная модель емкости как системы A описывается уравнением

$$i = C \frac{du_c}{dt}$$

Пусть A — ориентированный объект, у которого i и u_C являются соответственно входом и выходом. Поставим вопрос: что необходимо знать об A в момент t_0 , чтобы иметь возможность определить значение u_C в любой момент времени $t > t_0$ при заданных значениях входа i на интервале между t_0 и t ?

Решение. Для определения u_C проинтегрируем уравнение для емкости от t_0 до t_1 .

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi. \quad (85)$$

Полученное уравнение является уравнением вход — выход — состояние. Величина $u_C(t_0)$ есть начальное состояние системы, то есть $x(t_0)$, $u_C(t)$ — переменная состояния системы. Если будет известно $u_C(t_0)$ и вход на интервале от t_0 до t (t_0, t_1), то $u_C(t)$ определено в любой момент времени $t_0 < t$. Здесь пространство состояний является вещественной осью.

Если i будет содержать дельта-функцию $\delta(t - t_0)$ в момент t_0 , то выражение (85) должно быть записано в виде

$$u_C(t) = u_C(t_{0-}) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi, \quad t \geq t_0.$$

и это следует понимать так, что $\delta(t - t_0)$ заключена в интервале интегрирования $(t_0 - t)$. Например, если $i(t) = \delta(t)$ и $t_0 < 0 < t$, то

$$u_C(t) = u_C(t_{0-}) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \delta(\xi) d\xi = u_C(t_{0-}) + \frac{1}{C}, \quad t > 0,$$

что означает наличие сигнала напряжения, равного $1/C$ в момент $t = 0$.

Пример 13. Рассмотрим электрическую цепь A , изображенную на рис. 65. Это ориентированная система, в которой u — входное напряжение, y — выходное напряжение и u_1 — скрытая выходная переменная. Написать уравнения вход \rightarrow выход, вход — выход — состояние; определить вектор состояния.

Решение. Уравнение вход — выход для этой системы имеет вид:

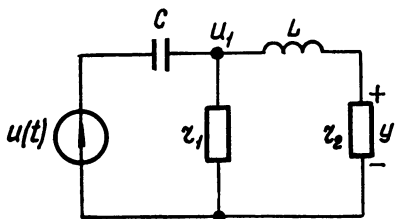


Рис. 65. Система к примеру 13.

$$y + \frac{r_1}{r_2} u_1 + r_2 C \dot{u}_1 = r_2 C \dot{u};$$

$$\dot{y} + \frac{r_2}{L} y = \frac{r_2}{L} u_1.$$

Вектором состояния системы A служит вектор $\mathbf{x}(t)$, компонентами которого являются напряжение на емкости и ток через индуктивность

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{y(t)}{r_2}, u(t) - u_1 \right).$$

Уравнение вход — выход — состояние может быть определено методами, изложенными ниже в § 10. Полагая для простоты $r_1 = r_2 = L = 1$, получаем

$$y(t) = \langle \varphi(t - t_0), \mathbf{x}(t_0) \rangle + \int_{t_0}^t e^{-(t-\xi)} [\cos(t - \xi) - \sin(t - \xi)] u(\xi) d\xi, \quad t \geq t_0,$$

где $\langle ab \rangle$ означает скалярное произведение a и b , а вектор $\varphi(t)$ определяется выражением

$$\varphi(t) = (e^{-t} \cos t, -e^{-t} \sin t), \quad t \geq 0.$$

В дальнейшем выражение $\mathbf{x}(t)$ как функцию $\mathbf{x}(t_0)$ и $\mathbf{u}(t_0, t]$ будем называть уравнением состояния системы A

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}(t_0, t)) \quad (86)$$

Уравнение состояния (86) производно от уравнения вход — выход — состояние. Типичным примером уравнения состояния является уравнение (70).

§ 5. Другие понятия теории систем

Система A называется системой без памяти, если для каждого t значение $y(t)$ зависит только от $\mathbf{u}(t)$, то есть уравнение вход — выход имеет следующий вид:

$$y(t) = G(u(t), t). \quad (87)$$

Например, квадратор, описываемый уравнением вход — выход

$$y(t) = [u(t)]^2$$

есть система без памяти. Дифференциатор, описываемый уравнением вход — выход

$$y(t) = \frac{du}{dt}$$

является системой с памятью, так как $y(t)$ определяется не только значением $\mathbf{u}(t)$, но также и значением \mathbf{u} в непосредственной близости от t .

Система A обладает конечной памятью длины L , если уравнение вход — выход может быть записано в следующем виде:

$$y(t) = G(u_{[t-L, t]}, t) \quad t > t_0 + L, \quad t_0 \in T, \quad (88)$$

где L — конечное вещественное число. Уравнение (88) означает, что для каждого t выход A в момент t зависит только от значений входа на интервале $(t - L, t)$. Примером системы с конечной памятью является идеальная линия задержки

$$y(t) = u(t - L) \quad t > t_0 + L, \quad t \in T.$$

Другим примером является скользящий усреднитель, который описывается уравнением вход — выход

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_{t-L}^t u(\xi) d\xi \quad t > t_0 + T, \quad t_0 \in T.$$

Источники энергии можно определить как системы, имеющие выход y , но не имеющие входа. Системы можно изображать графически. Для этого используется обычная прямоугольная блок-схема,

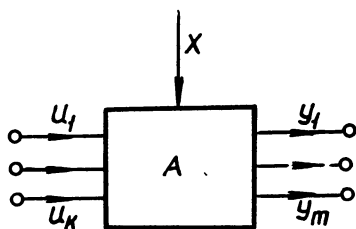


Рис. 66. Представление системы в виде блок-схемы.

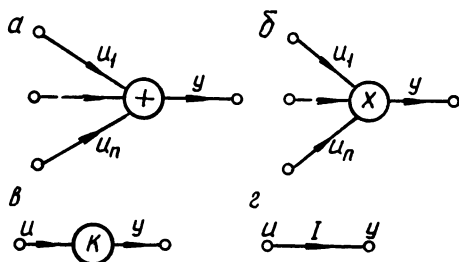


Рис. 67. Функциональные звенья: сумматор (а), умножитель (б), усилитель (в), единичный усилитель (г).

представленная на рис. 66. Здесь основные переменные обозначены стрелками; стрелки обозначающие входы, направлены к A , стрелки, соответствующие выходам, направлены от A . Стрелка x означает, что выход y зависит не только от входов, но также и от состояния x .

Пять элементов — сумматоры, умножители, усилители, линии задержки и интеграторы обладают двумя специфическими свойствами: а) образуют независимое множество в том смысле, что ни один из элементов не может быть сконструирован из конечного числа элементов других четырех типов; б) образуют замкнутое множество в том смысле, что практически любые физические реализуемые объекты могут быть синтезированы с произвольно высокой степенью точности из достаточно большого числа таких элементов.

Сумматором является $(n+1)$ полюсник, имеющий n входов $u_1 \dots u_n$ и один выход y и не имеющий памяти:

$$y = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Сумматор обычно изображается в виде окружности со знаком плюс внутри (рис. 67, а).

Умножитель — это $(n+1)$ полюсник, имеющий n входов $u_1 \dots u_n$ и один выход y . Уравнение вход — выход для умножителя имеет вид:

$$y = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n.$$

Умножитель изображается в виде окружности с крестиком внутри (рис. 67, б).

Усилитель — двухполюсник, определяемый уравнением вход — выход (рис. 67, в) $y = ku$.

Постоянная k называется масштабным множителем или масштабным коэффициентом. Постоянная k относится к полю комплексных чисел. Усилитель с единичным масштабным множителем называется единичным или тождественным оператором и обозначается через 1, I (рис. 67, г).

Линия задержки — двухполюсник, определяемый уравнением вход — выход

$$y(t) = u(t - \delta) \quad t > t_0 + \delta, \quad t_0 \leq T,$$

где δ ($\delta = \text{const} > 0$) — величина задержки. Выход линии задержки в момент t равен значению ее входа в момент $t - \delta$.

Интегратор представляет собой двухполюсник с уравнением вход — выход — состояние

$$y(t) = y(t_0-) + \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \quad t \geq t_0, \quad t_0 \in T.$$

§ 6. Основные свойства состояния

Если задано начальное состояние $x(t_0)$ и выбран определенный вход $u(t)$, то состояние системы $x(t)$ определено единственным образом. Вектор $x(t)$ часто называют фазовым вектором системы, а компоненты x_i ($i=1, \dots, n$) фазовыми координатами системы.

Примем следующее определение. Фазовым вектором объекта называется всякий вектор $x = \{x_i\}$ ($i=1, \dots, n$), который обладает следующими свойствами: 1) компоненты $x_i(t)$ характеризуют текущее состояние системы; 2) при выбранном возможном входе (управлении) $u(t)$, каждое начальное состояние $x(t_0)$ единственным образом определяет значение $x(t) = x(t, t_0, x(t_0))$ для всех рассматриваемых моментов времени t . При этом должны быть спра-

ведливы равенства: $x(t, \tau, x(\tau)) = x(t, t_0, x(t_0))$, если только $x(\tau) = x(\tau, t_0, x(t_0))$, каковы бы ни были t, τ, t_0 из отрезка $[t_a, t_b]$ (рис. 68).

Одним из важных понятий, связанных с понятием состояния, является понятие эквивалентных состояний.

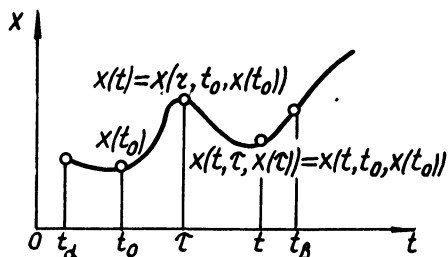


Рис. 68. К определению фазового вектора.

Два состояния системы называются эквивалентными, если одна и та же входная функция $u(t) \forall u$ вызывает тождественную реакцию системы из обоих состояний.

Пример 14. Рассмотрим простую электрическую цепь, представленную на рис. 69, а. Напряжение u будем рассматривать в качестве входа, а ток y считаем выходом; токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$, проте-

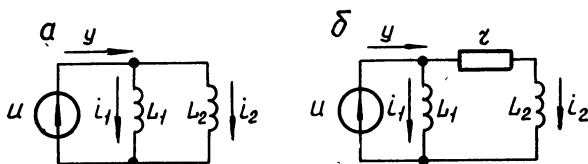


Рис. 69. Системы: с эквивалентными состояниями (а), редуцированная (б).

кающие через L_1 и L_2 , рассматриваются как компоненты вектора состояния $x(t)$. Уравнение вход — выход — состояние будет иметь вид

$$y(t) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi, \quad (89)$$

где первые два члена могут быть представлены в виде скалярного произведения вектора $(1, 1)$ на вектор начального состояния $(i_1(t_0), i_2(t_0))$.

Из рассмотрения уравнения (89) ясно, что единственной характеристикой вектора начального состояния $x(t_0)$ является сумма его компонент. Два состояния $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$, сумма компонент которых равна между собой, обязательно должны быть эквивалент-

ны. Например $\mathbf{x}_1(t_0) = (6, -2)$ и $\mathbf{x}_2(t_0) = (3, 1)$ являются эквивалентными состояниями рассматриваемой цепи.

Система, представленная на рис. 69, б не имеет эквивалентных состояний. В ней вектором состояния также является вектор $\mathbf{x}(t) = (i_1(t), i_2(t))$. Если для простоты положить $L_1 = L_2 = r = 1$, то уравнение вход — выход — состояние можно записать так

$$y(t) = i_1(t_0) + i_2(t_0)e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^t (1 + e^{-(t-\xi)})u(\xi) d\xi. \quad (90)$$

Здесь пространством состояний будет множество упорядоченных пар вещественных чисел. Для того, чтобы состояние (α_1, α_2) было эквивалентно состоянию (γ_1, γ_2) , где $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$ и γ_2 — ве-

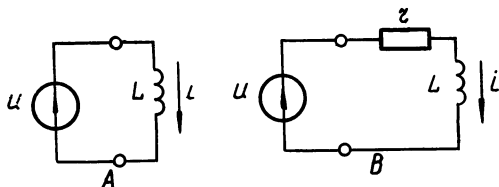


Рис. 70. Система А без установившегося и система В с установившимся состояниями.

щественные числа, представляющие собой величины токов i_1 и i_2 соответственно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{-(t-t_0)} = \gamma_1 + \gamma_2 e^{-(t-t_0)} \quad \forall t_0, t \geq t_0.$$

Это возможно лишь при $\alpha_1 = \gamma_1$ и $\alpha_2 = \gamma_2$. Следовательно, никакие два различных состояния не могут быть эквивалентными.

Система А является редуцированной, если ее пространство состояний не содержит различных состояний, эквивалентных между собой. Другими словами, система А является редуцированной, если все ее состояния различимы.

В анализе систем важную роль играют три типа состояния: нулевое, установившееся и состояние равновесия.

Состояние θ системы А называется нулевым, если для всех t_0 реакция А на нулевой вход при начальном состоянии θ является нулевой функцией. В символической записи $\{\theta$ есть нулевое состояние А $\}$, если и только если $\{A(\theta, 0) = 0\} \forall t_0$. Другими словами, если начальным состоянием А является нулевое состояние и к системе не прикладывается никакого входа, то выходом является нулевая функция.

Напомним, что скалярная или векторная функция времени, равная нулю при $t \geq t_0$, называется нулевой функцией и обозначается символом $0(t_0)$. Если вход u равен нулю при $t \geq t_0$, то он называется нулевым входом.

Установившимся состоянием системы A , если оно существует, называется предельное состояние, к которому приходит система при нулевом входе и которое не зависит от начального состояния.

Пример 15. Рассмотрим две электрические цепи (рис. 70). В обоих случаях состоянием является протекающий через L ток $i(t)$, то есть $x(t) = i(t)$. Для системы A

$$u = L \frac{dx}{dt}$$

или интегрируя это уравнение от t_0 до t , получаем уравнение состояния

$$x(t) = x(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi,$$

которое при $u(t) \equiv 0$ сводится к выражению $x(t) = x(t_0) =$ начальный ток через L , $t > t_0$.

Для системы B получаем

$$u = rx + L \frac{dx}{dt}.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$x(t) = e^{-(r/L)(t-t_0)} x(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t e^{-r/L(t-\xi)} u(\xi) d\xi, \quad (91)$$

при нулевом входе получаем

$$x(t) = e^{-r/L(t-t_0)} x(t_0).$$

Из анализа полученных уравнений следует, что система A не имеет установившегося состояния, потому что предельное состояние зависит от начального. Система B имеет установившееся состояние, так как $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $x(t_0)$.

Состояние n называется состоянием равновесия системы A , если при приложении к A с начальным состоянием n нулевого входа ее состояние $x(t)$ остается равным n для всех $t \geq t_0$.

Различают следующие специальные виды выходных реакций системы: реакция при нулевом состоянии и реакция при установившемся состоянии системы на входной сигнал u .

Реакция при нулевом состоянии системы на входной сигнал u представляет собой реакцию системы на u , если начальное состояние A есть нулевое состояние θ . Или иначе отрезок реакции системы A на входной сигнал u , когда система A первоначально находится в нулевом состоянии, называется реакцией при нулевом состоянии системы.

Реакция при установившемся состоянии системы A на входной сигнал u представляет собой реакцию системы, если начальное состояние A установившееся.

Установившаяся реакция системы A на вход $u(t_0, t]$ определяется как предел, если он существует, реакции при установившемся состоянии системы на вход u , когда $t_0 \rightarrow \infty$.

В качестве примера рассмотрим систему, выход которой определяется выражением

$$y(t) = e^{-(r/2)(t-t_0)} x(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t e^{-r/L(t-\xi)} u(\xi) d\xi.$$

Пусть вход $u(t) = \sin t \forall t$; $L=r=1$. Так как установившееся состояние равно нулю, то установившаяся реакция равна

$$y(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t e^{-(t-\xi)} \sin \xi d\xi = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t).$$

§ 7. Стационарность и линейность

Грубо говоря, система A стационарна, если ее характеристики не изменяются во времени. Система, описываемая уравнением вход — выход

$$y(t) = 2u(t) + 3u^3(t),$$

стационарна. Система, описываемая уравнением вход — выход

$$y(t) = 2u(t) + 3u^2(t) \cdot t$$

нестационарна, или неинвариантна во времени. Любая система, подверженная старению, является системой нестационарной. Представление о стационарной системе есть идеализация физической системы, характеристики которой изменяются очень медленно по сравнению со скоростью изменения входного сигнала.

Для введения более точного понятия стационарности рассмотрим понятие оператора сдвига.

Оператором сдвига I_δ называется система, описываемая уравнением вход — выход

$$T_\delta(u_{(t_0, t_1]}) = u_{(t_0+\delta, t_1+\delta]} \quad \forall \delta \forall u, \quad (92)$$

где $T_\delta(u)$ означает отрезок выходной функции, а u — отрезок входной функции.

Действие оператора T_δ на входной сигнал u состоит в сдвиге u вдоль оси времени на определенную величину δ . Положительный сдвиг δ соответствует задержке на δ единиц времени (рис. 71), а отрицательный сдвиг δ соответствует опережению на δ единиц времени.

Из определения следует, что T_δ обладает свойством гомогенности

$$T_\delta(ku) = kT_\delta(u) \quad \forall \delta \forall u$$

и всех вещественных постоянных k ; свойством аддитивности

$$T_{\delta}(u_1 + u_2) = T_{\delta}(u_1) + T_{\delta}(u_2) \quad \forall \delta \text{ и всех } u_1 \text{ и } u_2$$

в пространстве входных функций; свойством коммутативности

$$T_{\delta_1} T_{\delta_2} \equiv T_{\delta_2} T_{\delta_1} = T_{\delta_1 + \delta_2}, \quad \forall \delta_1, \forall \delta_2.$$

Обычно принято называть систему стационарной, если она стационарна в нулевом состоянии. Стационарность в нулевом состоянии это такая стационарность системы, которая имеет место, когда

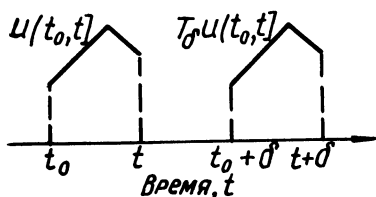


Рис. 71. Сдвиг отрезка функции.

действие системы начинается в нулевом состоянии. Дадим более строгое определение этому понятию.

Система A называется стационарной в нулевом состоянии, если для всех входных сигналов u и всех временных сдвигов δ реакция системы A при нулевом состоянии на $u \stackrel{\Delta}{=} u(t_0, t]$ равна сдвинутой

на величину δ вдоль оси t ее реакции при нулевом состоянии на сдвинутый вход $T_{\delta}(u)$. Или иначе, система A стационарна в нулевом состоянии тогда и только тогда, когда ее реакция на любой вход u зависит лишь от вида u и не зависит от момента приложения u .

Рассмотрим систему, которая описывается уравнением вход — выход — состояние

$$y(t) = e^{-(t-t_0)} y(t_{0-}) + \int_{t_0}^t e^{-(t-\xi)} u(\xi) d\xi, \quad t \geq t_0.$$

Реакция этой системы при нулевом состоянии будет

$$y(t) = \int_{t_0}^t e^{-(t-\xi)} u(\xi) d\xi, \quad t \geq t_0.$$

Если теперь входной сигнал сдвинуть на δ единиц времени, то выходной сигнал в момент $t + \delta$ будет

$$\int_{t_0 + \delta}^{t + \delta} e^{-(t - \xi + \delta)} u(\xi - \delta) d\xi.$$

Это выражение совпадает с исходным, если в нем переменную интегрирования заменить на $\xi - \delta$.

Системы, стационарные в нулевом состоянии, образуют класс систем, замкнутый по отношению к операциям сложения, умножения и инверсии. Инверсными системами будут A и B , если предположить, что система A в состоянии «уничтожить» результат преобразования системой B входа и наоборот.

Система A называется стационарной при нулевом входном сигнале тогда и только тогда, когда для всех начальных состояний, всех начальных моментов времени, всех временных сдвигов δ и при нулевом входном сигнале реакция системы A , имеющей в момент $t_0 - \delta$ состояние α , идентична реакции той же системы с тем же начальным состоянием в момент t_0 .

Пусть уравнение вход — выход — состояние системы A имеет вид

$$y(t) = ts_1(t_{0-}) + e^{-(t-t_0)} s_2(t_{0-}) + \int_{t_0}^t e^{-(t-\xi)} u(\xi) d\xi,$$

где $s(t_0) = (s_1(t_{0-}), s_2(t_{0-}))$ представляет собой вектор начального состояния системы A . Тогда система A стационарна в нулевом состоянии и нестационарна при нулевом входе. Возьмем систему A , описываемую уравнением вход — выход

$$\frac{dy}{dt} + y(t) = tu(t).$$

Эта система стационарна при нулевом входе, но нестационарна в нулевом состоянии.

Теперь можно дать общее определение стационарности, которое включает в себя как частные случаи понятие стационарности при нулевом входе и нулевом состоянии.

Система A стационарна относительно начального состояния в том и только в том случае, если отрезок выходной функции системы A при входе $T_\delta(u)$ (u сдвинуто на δ единиц времени), A сдвинутой выходной функции $T_\delta(A(\alpha, u))$ системы A при входе u , когда A первоначально находится в состоянии α .

$$T_\delta(A(\alpha; u)) = A(\alpha; T_\delta(u)) \quad \forall \delta \quad \forall u \quad \forall \alpha. \quad (93)$$

Остановимся на другом основном понятии, понятии линейности. Обычно линейность определяется с помощью понятий аддитивности и гомогенности. Гомогенность означает наличие пропорциональности между причиной (входом) и результатом (выходом). Аддитивность означает суперпозицию причин и их следствий. Причем предполагается, что начальное состояние системы есть нулевое состояние. Последнее предположение приводит к двум недостаткам. Во-первых, нельзя ответить на вопрос, является ли заданная система линейной, если ее начальное состояние ненулевое. Рассмотрим вновь уравнение (71) вход — выход — состояние

$$i(t) = -\frac{1}{r} e^{-\frac{1}{rC}(t-t_0)} u_C(t_0) - \frac{1}{r^2 C} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{rC}(t-\xi)} u(\xi) d\xi + \frac{1}{r} u,$$

$$t \geq t_0.$$

и подадим на вход два простых возбуждающих сигнала

$$u_1(t) = 2 \cdot 1(t - t_0) \text{ и } u_2(t) = 4 \cdot 1(t - t_0).$$

Первый сигнал дает в качестве отклика ток

$$i(t) = -\frac{1}{r} e^{-\frac{1}{rC}(t-t_0)} u_C(t_0) + \frac{2}{r} e^{-\frac{1}{rC}(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Второй сигнал дает в качестве отклика ток

$$i(t) = -\frac{1}{r} e^{-\frac{1}{rC}(t-t_0)} u_C(t_0) + \frac{4}{r} e^{-\frac{1}{rC}(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Из этого простого примера мы видим, что рассматриваемая система не является ни аддитивной, ни однородной, пока $u_C(t_0)$ не равно нулю.

Во-вторых, обычное определение линейности может привести к тому, что нелинейная система A будет ошибочно принята за линейную систему, если она ведет себя как линейная, когда ее начальное состояние будет нулевым.

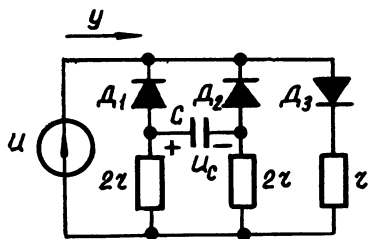


Рис. 72. Пример нелинейной цепи, которая линейна в нулевом состоянии.

Рассмотрим систему A (рис. 72). Здесь D_1, D_2, D_3 идеальные диоды. Идеальный диод представляет систему без памяти, описываемую соотношением вход — выход $u(t) = 0$ для $i(t) \geq 0$ и $u(t) = \infty$ для $i(t) < 0$, где $i(t)$ — ток через диод, текущий в направлении стрелки, и $u(t)$ — напряжение на диоде. На входе системы действует напря-

жение u , откликом является ток y . Напряжение на емкости u_C есть состояние системы. Если в момент t_0 — $u_C = 0$, то токи в ветвях, содержащих D_1 и D_2 будут одинаковыми для $t \geq t_0$ и соответственно u_C будет равно нулю для $t \geq t_0$. Благодаря этому ток в цепи y не изменится, если из цепи убрать емкость. Таким образом, система, показанная на рис. 72, в нулевом состоянии эквивалентна цепям A', A'' , показанным на рис. 73.

Эти цепи в свою очередь эквивалентны цепи из одного постоянного сопротивления r , которая является линейной системой без памяти, а это и означает, что система A линейна в нулевом состоянии. Если начальное состояние не является нулевым, то система A нелинейна, так как она начинает движение из ненулевого состояния ($u_C \neq 0$ в момент t_0), то связь между u и y будет нелинейной. Заметим, что состояние $u_C \neq 0$ недостижимо из нулевого состояния.

Из этих двух примеров ясно, как важно сформулировать понятие линейности, которое не включает предположения, что начальное состояние системы есть нулевое состояние. Вначале дадим определение понятиям гомогенности, аддитивности и двум частным видам линейности: в нулевом состоянии и при нулевом входе.

Система A гомогенна тогда и только тогда, когда для всех сигналов u в пространстве входных отрезков функций этой системы,

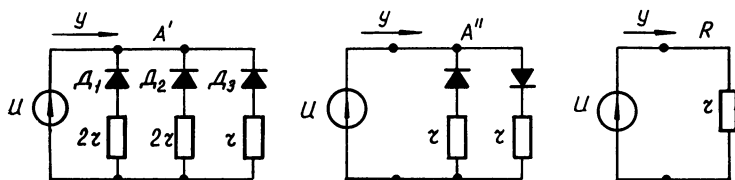


Рис. 73. Эквивалентность систем: A' эквивалентна A'' , которая в свою очередь эквивалентна R .

для всех вещественных k реакция системы при нулевом состоянии на входной сигнал ku в k раз больше реакции системы A при нулевом состоянии на входной сигнал u .

В символической записи

$$\{A \text{ гомогенна}\}, \text{ если и только если } \{A(ku) = kA(u)\} \forall k \forall u. \quad (94)$$

Пример 16. Квадратор представляет собой систему без памяти, задаваемую уравнением вход — выход

$$y(t) = [u(t)]^2,$$

где u — вещественная функция времени. Если y_1 — реакция квадратора на вход u , то его реакция на ku будет k^2u . Следовательно, квадратор не является гомогенной системой.

Система A аддитивна тогда и только тогда, когда для любой пары функций времени u_1 и u_2 ее реакция при нулевом состоянии на сумму $u_1 + u_2$ есть сумма ее реакций при нулевом состоянии на u_1 и u_2 .

В символической форме

$$\{A \text{ аддитивна}\}, \text{ если и только если } \{A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2)\} \forall u_1 \forall u_2. \quad (95)$$

Важным свойством аддитивности является ее отношение к гомогенности. Если система A аддитивна, тогда для всех практических случаев она также и гомогенна, поскольку любая постоянная k может быть с любой точностью аппроксимирована рациональным числом n в любой физической системе, малая разница между k и ее аппроксимацией проявится в малом отличии между реакцией на k и ее аппроксимацией.

Поэтому аддитивность означает «почти» гомогенность, но обратное утверждение несправедливо. Рассмотрим примеры.

Пример 17. Рассмотрим систему без памяти, реакция которой при нулевом состоянии на входной сигнал u задана в виде

$$y(t) = \sqrt[3]{[u(t)]^{3/2} + [\dot{u}(t)]^{3/2}}.$$

Это гомогенная система, поскольку реакция A на ku в k раз больше реакции A на u . С другой стороны система A не аддитивна.

Теперь определим линейность в нулевом состоянии. Система линейна в нулевом состоянии тогда и только тогда, когда она аддитивна и гомогенна.

Свойство аддитивности и гомогенности можно записать одним математическим выражением. Пусть u и v — произвольные функции времени в пространстве отрезков функций системы A и пусть k — произвольная вещественная постоянная. Тогда система A линейна в нулевом состоянии, если ее реакция при нулевом состоянии на $k(u - v)$ равна умноженной на k реакции системы A при нулевом состоянии на u минус умноженная на k реакция системы A при нулевом состоянии на v . Символически это можно записать так:

$\{A$ линейна в нулевом состоянии и всех вещественных $k\}$, если

$$\text{и только если } \{A(k(u - v)) = kA(u) - kA(v)\} \forall u \forall v. \quad (96)$$

Покажем эквивалентность этих двух определений. Положим сначала в уравнении (95) $v=0$. Получаем, что A гомогенна. Полагая $k=1$ и $v=-v'$, находим, что A аддитивна. Если же A и аддитивна и гомогенна, то следует

$$A(k(u - v)) = kA(u) - kA(v).$$

Если система A линейна в нулевом состоянии, то она также линейна в любом другом состоянии, которого она может достичь из нулевого состояния.

Из этого утверждения вытекает, что если система A линейна в нулевом состоянии и если все состояния A достижимы из ее нулевого состояния, то A линейна относительно всех возможных начальных состояний.

Очень важным понятием для системы является понятие сильносвязанности. Системы, обладающие таким свойством, что каждое состояние достижимо из любого другого состояния в пространстве состояний, называются сильносвязанными. Для линейных систем имеется тесная связь между понятием сильносвязанности и так называемой полной управляемостью.

В следующем примере различных систем, имеющих эквивалентное состояние (рис. 74), каждое состояние системы A достижимо из нулевого состояния. С другой стороны, в случае системы B состояние $(-1, 1)$ недостижимо из состояния $(0, 0)$. Действительно, при приложении входного напряжения $u(t_0, t)$ к системе B , нахо-

дящейся в состоянии $(0,0)$, конечное состояние будет представлять собой вектор

$$\mathbf{x}(t_1) = \left(\frac{1}{2L} \int_{t_0}^t u(t) dt, \frac{1}{2L} \int_{t_0}^t u(t) dt \right),$$

в котором первый и второй компоненты всегда равны между собой. Следовательно, не существует входа $u(t_0, t]$ такого, что $\mathbf{x}(t_1) = (-1, 1)$.

Уравнение вход — выход — состояние для A :

$$y(t) = y(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \quad \mathbf{x}(t_0) = y(t_0);$$

для B :

$$w(t) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \quad \mathbf{x}(t_0) = (i_1(t_0), i_2(t_0)).$$

Так как линейность в нулевом состоянии еще не означает линейности во всех возможных начальных состояниях, то возникает

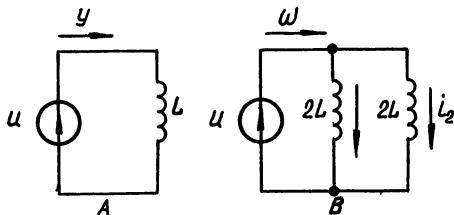


Рис. 74. К понятию сильносвязанности системы.

необходимость в ведении дополнительного свойства, которым должна обладать система, чтобы оправдать название линейной.

Система A линейна при нулевом входе, если ее выход при нулевом входе есть гомогенная и аддитивная функция, начального состояния, то есть

$$A(k\alpha; 0) = kA(\alpha; 0) \quad \forall \alpha$$

и для всех вещественных постоянных k, α

$$A(\alpha_1 + \alpha_2; 0) = A(\alpha_1; 0) + A(\alpha_2; 0) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2,$$

где $A(\alpha, 0)$ означает выход при нулевом входе системы A с начальным состоянием α , а α, α_1 и α_2 определены в пространстве состояний. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 18. Система, описываемая уравнением вход — выход — состояние

$$y(t) = e^{-(t-t_0)}\alpha + \int_{t_0}^t e^{-(t-\xi)} u^3(\xi) d\xi, \quad t \geq t_0.$$

где α — начальное состояние системы, является линейной при нулевом входе, но нелинейной в нулевом состоянии (Здесь про странством состояний является вся вещественная ось.).

Пример 19. Система, описываемая уравнением вход — выход — состояние

$$y(t) = (e^{-(t-t_0)} \alpha_1 + e^{-3(t-t_0)} \alpha_2)^2 + \\ + \int_{t_0}^t (e^{-(t-\xi)} + e^{-3(t-\xi)}) u(\xi) d\xi, \quad t \geq t_0,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ вектор начального состояния, является системой, линейной в нулевом состоянии, но нелинейной при нулевом входе.

Теперь определим линейность системы, которая объединит как линейность в нулевом состоянии, так и линейность при нулевом входе.

Система A линейна тогда и только тогда, когда она:

а) линейна относительно нулевого состояния и всех других состояний, которых она может достичь из нулевого состояния;

б) линейна при нулевом входе.

Линейные системы обладают двумя особенностями, благодаря которым обусловлена их важность. Первая состоит в относительной простоте определения реакции системы A на заданный вход. Второй особенностью линейных систем является их свойство, выраженное в теореме [3]. Класс линейных систем замкнут по отношению к операциям сложения, умножения и инверсии. Иными словами: если A и B — линейные системы, то системы $A+B$ и AB также линейны; если A имеет инверсию A^{-1} , то и A^{-1} также линейная система.

§ 8. Уравнение состояния и его решение в общем виде

Нами введены следующие уравнения.

Уравнение вход — выход

$$A(u, y) = 0.$$

Это соотношение является по существу средством определения множества всех пар вход — выход, принадлежащих A :

Уравнение вход — выход — состояние

$$y(t) = A(x(t_0), u(t_0, t)).$$

Это уравнение устанавливает зависимость между выходом системы, ее начальным состоянием и управляющим воздействием. Абстрактный объект полностью определяется уравнением вход — выход —

состояние. Любая система, описываемая уравнением вход — выход вида

$$d_n \frac{d^ny}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^mu}{dt^m} + \dots + b_0 u \quad (a_n \neq 0) \quad (97)$$

имеет определяемый состоянием выход при $m < n$:

Уравнение состояния объекта

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}(t_0, t]).$$

Уравнения достижения в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) \dots \mathbf{u}^k(t), t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) \dots \mathbf{u}^e(t), t). \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение состояния в канонической форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t); \quad (98)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t). \quad (99)$$

Каноническое уравнение состояния линейной системы в дифференциальной форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t); \quad (100)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t). \quad (101)$$

Если решить уравнения (98) и (99), то уравнения состояния можно записать в следующей векторной форме

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}(t_0, t)]; \quad (102)$$

$$\mathbf{y}(t_0, t) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}(t_0, t)]. \quad (103)$$

Из уравнения (103) следует, что выходной сигнал \mathbf{y} на интервале наблюдения $(t_0, t]$ является однозначной функцией входного сигнала \mathbf{u} на этом интервале времени и состояния в начале интервала. Состояние в конце интервала $\mathbf{x}(t)$, является однозначной функцией такого же аргумента. Эти уравнения задают систему с определенным состоянием. Вектор состояния определяется в n -мерном пространстве состояний с координатами x_1, x_2, \dots, x_n . Движение конца вектора состояния в пространстве состояний называется траекторией вектора состояния.

Канонические уравнения состояний (100), (101) записаны для нестационарной линейной системы. В этих уравнениях $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ являются матрицами с изменяющимися во времени элементами. Если система является стационарной, то матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} от времени не зависят. Тогда уравнение состояния линейной стационарной системы в общем виде запишется

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad (104)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (105)$$

В этих уравнениях матрицы **A**, **B**, **C** и **D** имеют следующий смысл. Если линейная система имеет n -мерное пространство состояний, то **A** есть основная матрица системы порядка $n \times n$. Ее структура определяет характер переходной матрицы состояния. От этой матрицы зависит характер как вынужденного, так и свободного решения. Если все характеристические числа этой матрицы имеют отрицательные действительные части, то решение однородного уравнения (104) стремится к нулю при стремлении t к бесконечности. Если одно из характеристических чисел имеет положительную действительную часть, то, по крайней мере, одна из переменных состояния становится неограниченной при стремлении t к бесконечности. Если характеристические числа лежат на мнимой оси (действительная часть равна нулю), то матрица $\Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots$ не стремится к нулевой матрице при стремлении t к бесконечности, однако она ограничена. **B** — матрица связи, порядка $n \times k$, где k — число входов системы. Структура этой матрицы определяет характер связи входа системы с различными переменными состояния. **C** — также матрица связи, связи переменных состояния с выходом системы; матрица имеет порядок $m \times n$, где m — число выходов системы; первый член в уравнении (105) представляет связь переменных состояния с различными составляющими вектора выхода; **D** — матрица связи, непосредственно связывающая вектор входа системы с вектором выхода; порядок матрицы $k \times m$. Структура этой матрицы определяет, каким образом вынуждающие функции на входе воздействуют на различные выходы. Для большинства физических систем **D** является нулевой матрицей. В свою очередь,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

определяет вектор состояния системы, вектор входных воздействий и вектор отклика системы. В общем виде блок-схема, соответствующая уравнениям (102) и (103), изображена на рис. 75.

Основная проблема при определении зависимости \mathbf{y} от \mathbf{u} состоит в решении дифференциального уравнения (104). Для получения полного решения $\mathbf{x}(t)$ воспользуемся методом вариации параметров. Эту задачу для скалярного уравнения мы уже решали. Однородное векторное дифференциальное уравнение имеет решение $\mathbf{x}_{\text{св}}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{x}(t_0)$ для $t \geq t_0$. Предлагаемое частное решение имеет вид

$$\mathbf{x}_{\text{пр}}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{u}_{\text{пр}}(t) \mathbf{x}(t_0).$$

Общее решение будет равно

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{св} + \mathbf{x}_{пр} = \varphi(t - t_0) \mathbf{x}(t_0) + \varphi(t - t_0) \mathbf{u}_{пр}(t) \mathbf{x}(t_0)$$

или запишем это уравнение в более удобном виде

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t - \tau) [\mathbf{I} + \mathbf{u}_{пр}(t)] \mathbf{x}(t_0) = \varphi(t - \tau) \mathbf{z}(t), \quad (106)$$

где t_0 — постоянная величина, а $\mathbf{z}(t)$ следует определить.

Подстановка уравнения (106) в уравнение (104) дает

$$\left[\dot{\varphi}(t - t_0) - \mathbf{A}\varphi(t - t_0) \right] \mathbf{z}(t) + \varphi(t - t_0) \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t).$$

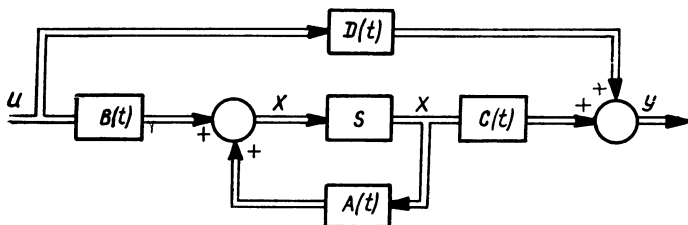


Рис. 75. Блок-схема, соответствующая уравнениям (102) и (103).

Ввиду того, что $\varphi(t - t_0)$ — матрица, столбцы которой являются решениями однородного уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, первый член выражения — нулевая матрица. Отсюда

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \varphi^{-1}(t - t_0) \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (107)$$

Интегрирование этого уравнения от t_0 до t записывается в виде

$$\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_0) = \int_{t_0}^t \varphi^{-1}(\xi - t_0) \mathbf{B}\mathbf{v}(\xi) d\xi.$$

Из уравнения (106) имеем

$$\varphi^{-1}(t - t_0) \mathbf{x}(t) = \varphi^{-1}(0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi^{-1}(\xi - t_0) \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi) d\xi.$$

Учитывая

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \mathbf{I} \text{ и } \varphi(t - t_0) \varphi^{-1}(\xi - t_0) = e^{\mathbf{A}(t - t_0)} \cdot e^{-\mathbf{A}(\xi - t_0)} = \\ &= e^{\mathbf{A}(t - \xi)} = \varphi(t - \xi) \end{aligned}$$

и умножая обе части слева на $\varphi(t - t_0)$, окончательно получим

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t - t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t - \xi) \mathbf{B}\mathbf{u}(\xi) d\xi. \quad (108)$$

Решение для выхода $y(t)$ следует из подстановки уравнения (108) в уравнение (105)

$$y(t) = C\varphi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C\varphi(t - \xi)Bu(\xi)d\xi + Du \quad (109)$$

§ 9. Линейные стационарные системы. Переходная матрица состояния

Однородное дифференциальное уравнение (104) для линейной стационарной системы имеет решение

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0). \quad (110)$$

Матрица $\varphi = e^{At}$ называется переходной матрицей состояния системы, описываемой уравнением (104), или фундаментальной. Переходной матрицей состояния она называется потому, что описывает изменение (переход) состояния системы. Объем вычислений при определении переходной матрицы состояния обычно больше, чем при разрешении линейного дифференциального уравнения относительно зависимой переменной. Однако имеющаяся дополнительная информация позволяет проектировщику системы управления использовать более совершенные методы проектирования. Вычисление переходной матрицы e^{At} может осуществляться различными методами. Основные же методы базируются на теореме Сильвестра и метода Кэли — Гамильтона. Широко также используются методы разложения в бесконечный ряд, метод частотной области и метод передаточной функции.

Рассмотрим способ вычисления матрицы e^{At} на основе теоремы Сильвестра. При этом ограничимся случаем, когда характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ матрицы A различны. Напомним, что характеристическими числами матрицы A называются корни уравнения

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (111)$$

где

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \text{ — единичная матрица;}$$

a_{ij} — элемент матрицы A , стоящий в i -строке и j -столбце; λ — искомый корень уравнения.

Теорема Сильвестра представляет собой эффективный метод получения функции от матрицы, если эта функция может выра-

жаться в виде матричного многочлена. Если $N(A)$ — матричный многочлен от A и если квадратная матрица A содержит n различных характеристических чисел, то многочлен от A можно записать

$$N(A) = \sum_{i=1}^n N(\lambda_i) z_0(\lambda_i), \quad (112)$$

где

$$z_0(\lambda_i) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (A - \lambda_j I)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (113)$$

или

$$N(A) = \sum \frac{N(\lambda_i) \text{Adj}[\lambda_i I - A]}{dp(\lambda)/d\lambda/\lambda = \lambda_i}, \quad (114)$$

где $\text{Adj}A = \|C_{ji}\|$ есть присоединенная для A матрица. Присоединенной для A называется матрица, образованная из алгебраических дополнений C_{ji} . Следовательно, присоединенная матрица является транспонированной для матрицы, образованной заменой элементов a_{ij} их алгебраическими дополнениями.

Таким образом, на основании теоремы Сильвестра можно записать, что

$$e^{At} = N(A) = \sum e^{\lambda_i t} Z_0(\lambda_i),$$

где $Z_0(\lambda_i)$ равняется (113).

Пример 20. Найти на основе теоремы Сильвестра e^{At} , если $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение 1. Определим характеристические числа матрицы A . Для этого составим характеристическое уравнение

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0,$$

отсюда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

2. Находим $Z_0(\lambda_i)$. Согласно (113)

$$Z_0(0) = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad Z_0(5) = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$e^{At} = e^{0t} \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + e^{5t} \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 + 4e^{5t} & -2 + 2e^{5t} \\ -2 + 2e^{5t} & 4 + e^{5t} \end{vmatrix}$$

Теперь вычислим переходную матрицу e^{At} методом Кэли — Гамильтона. Из теоремы Кэли — Гамильтона следует, что матрица

A удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению. Так например, матрица

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

имеет характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$. Если вместо λ подставить **A**, то получим $P(A) = 0$. Следовательно, $P(A)$ = нулевой матрице = $\|0\|$. Обозначим через $F(A) = e^{At}$ и представим в следующем виде

$$F(A) = Q(A) \cdot P(A) + R(A).$$

Согласно теореме Кэли — Гамильтона $P(A) = 0$. Из этого следует, что

$$F(A) = R(A).$$

Метод Кэли — Гамильтона определения матрицы e^{At} состоит в том, что $F(A) = R(A)$ представляется в виде полинома $(n - 1)$ -ой степени относительно матрицы **A**

$$R(A) = e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1},$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ неизвестные коэффициенты, которые можно определить из следующих уравнений

$$e^{A_i t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \alpha_2 \lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Это справедливо для случая, когда все характеристические числа разные. Если же характеристические числа λ_i имеют кратность s , то для этого корня составляется s уравнений

$$\left. \frac{d^k e^{\lambda t}}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_k} = \left. \frac{d^k}{d\lambda^k} (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1}) \right|_{\lambda=\lambda_i}.$$

Пример 21. Найти матрицу e^{At} , если $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Решение. Данная матрица третьего порядка. Она имеет два корня $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и один корень $\lambda_3 = 3$. Так как матрица **A** третьего порядка, то многочлен $R(\lambda)$ — второго порядка

$$e^{At} = \alpha_0 I = \alpha_1 A + \alpha_2 A^2.$$

Отсюда получим три уравнения для определения λ_i :

$$\left. \frac{d^k e^{\lambda t}}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \left. \frac{d^k}{d\lambda^k} (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2) \right|_{\lambda=\lambda_1}, \quad (k=0, 1);$$

$$e^{\lambda_3 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_3 + \alpha_2 \lambda_3^2.$$

Таким образом, α_i определяется из следующей системы уравнений

$$\begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

отсюда имеем

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 2 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

В результате будем иметь

$$e^{At} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4e^t e^{-t} + 2te^t + 3t^2 - 2e^t + 2e^{3t} \\ 0 & 4e^t & 0 \\ 0 & -2e^t + 2e^{3t} & 4e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим третий способ определения переходной матрицы методом разложения в бесконечный ряд.

Из определения переходной матрицы следует

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots$$

После выполнения операций возведения в степень и суммирования первых k членов следует найти в замкнутом виде каждый элемент матрицы e^{At} .

Пример 22. Найти матрицу e^{At} , если $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Степени A находятся последовательным умножением на A . Таким образом,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 25 \end{pmatrix}$$

и

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 + 4t + \frac{20t^2}{2!} + \frac{100t^3}{3!} + \dots & 2t + \frac{10t^2}{2!} + \frac{50t^3}{3!} + \dots \\ 2t + \frac{10t^2}{2!} + \frac{50t^3}{3!} + \dots & 1 + t + \frac{5t^2}{2!} + \frac{25t^3}{3!} + \dots \end{pmatrix}$$

Вычислив бесконечный ряд для каждого элемента матрицы e^{At} , получим переходную матрицу, как в примере 20.

§ 10. Методика составления уравнений состояния

Существует несколько методов составления уравнений состояния. Рассмотрим один из них на примере цепи rLC . Рассмотрим цепь A , показанную на рис. 76, с входом u (входное напряжение) и выходом y (выходное напряжение). Цепь rLC представляет собой

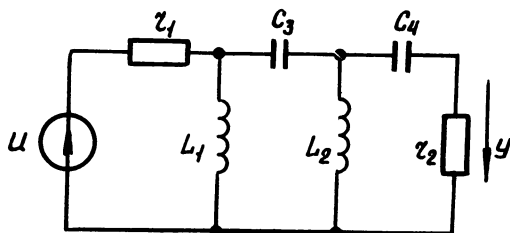


Рис. 76. Цепь rLC .

частный случай соединения сумматоров, усилителей, интеграторов и дифференциаторов. На рис. 76 представлена ориентированная система, хотя ее компоненты L_1 , L_2 , C_3 , C_4 , r_1 и r_2 не ориентированы. Уравнения состояния соединения усилителей, сумматоров, интеграторов и дифференциаторов можно представить в канонической форме, если это соединение не содержит дифференциаторов [3]. Чтобы выполнить это условие в электрической цепи из r , L и C , необходимо ориентировать L и C так, чтобы они выполняли функции интеграторов. Это означает, что индуктивность L , характеризуемая выражением

$$u = L \frac{di}{dt},$$

ориентируется так, чтобы переменная u была ее входом, а i — выходом. Подобным образом емкость C , характеризуемая зависимостью

$$i = C \frac{du}{dt},$$

ориентируется так, чтобы переменная i была ее входом, а u — выходом. Соответственно состояние L в момент времени t характеризуется величиной $i(t)$, а состояние C — величиной $u(t)$. Система A , ориентированная таким образом, становится соединением сумматоров, усилителей и интеграторов. Далее процедура составления уравнений состояний сводится к следующему.

Первый этап. Сопоставляем вектор состояния x с A , обозначая компонентами x токи, текущие через индуктивность, и напряжения на емкостях.

Второй этап. Заменяем каждую индуктивность L в A фиктивным источником тока i_L , причем $i_L \triangleq$ — ток, текущий через L , характеризует состояние данной L (рис. 77, а).

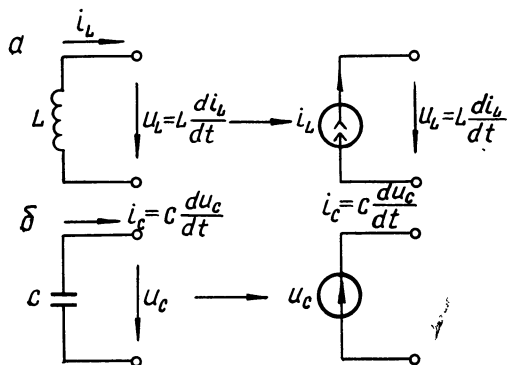


Рис. 77. Представление емкости и индуктивности в виде фиктивных источников: замена индуктивности фиктивным источником тока (а), замена емкости фиктивным источником напряжения (б).

Третий этап. Заменяем каждую емкость C в A фиктивным источником напряжения u_C , причем $u_C \triangleq$ — напряжение на емкости C представляет состояние данного C (рис. 77, б).

В результате таких замещений A преобразуется в цепь \hat{A} , содержащую только сопротивления, а также источники тока и напряжения.

Четвертый этап. Находим выходные напряжения, возникающие на зажимах каждого фиктивного источника тока i_L цепи A , и приравниваем их $L \frac{di_L}{dt} = L p i_L$, где $p = \frac{d}{dt}$ оператор дифференцирования. Находим также выходные токи, протекающие через зажимы каждого фиксированного источника напряжения u_C цепи A и приравниваем их $C p u_C$.

Пятый этап. Представляем выход y цепи A как линейную комбинацию всех источников напряжения и тока A (включая как фиктивные, так и внешние источники). Получаемые в результате уравнения есть уравнения состояния A .

Пример 23. Применим изложенную методику к цепи, показанной на рис. 76, сопоставим с A вектор состояния x (i_1, i_2, u_3, u_4). После замещения L и C соответствующими источниками тока и напряжения, получим схему, показанную на рис. 78. Используя

методы анализа цепей, получим следующие выражения для u_1 , u_2 , i_3 , i_4 и y

$$-L_1 p i_1 = u_1 = \frac{1}{r_1 + r_2} (r_1 r_2 i_1 + r_1 r_2 i_2 - r_1 u_3 - r_1 u_4 + r_2 u);$$

$$-L_2 p i_2 = u_2 = \frac{1}{r_1 + r_2} (r_1 r_2 i_1 + r_1 r_2 i_2 + r_2 u_3 - r_1 u_4 + r_2 u);$$

$$-C_3 p u_3 = i_3 = \frac{1}{r_1 + r_2} (r_1 i_1 + r_2 i_2 + u_3 + u_4 + u);$$

$$-C_4 p u_4 = i_4 = \frac{1}{r_1 + r_2} (r_1 i_1 + r_1 i_2 + u_3 + u_4 + u);$$

$$y = \frac{1}{r_1 + r_2} (r_1 r_2 i_1 + r_1 r_2 i_2 + r_2 u_3 + r_2 u_4 + r_2 u).$$

Методика, описанная выше, применима также к нестационарным цепям. Для составления уравнений состояний цепи rLC можно применять несколько видоизмененную методику. Пусть линей-

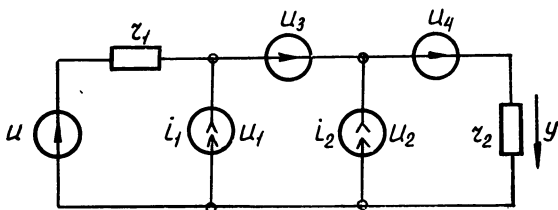


Рис. 78. Схема, полученная в результате замены индуктивностей и емкостей цепи рис. 76 источником тока и напряжения.

ная стационарная электрическая цепь с q узлами и p ветвями имеет l индуктивностей и r емкостей, k входов и m выходов. Переменными состояниями являются x_1, x_2, \dots, x_n ($n=l+2$) напряжений на емкостях и токи в индуктивностях, если они независимы. Весь процесс составления уравнений состояний вновь разобьем на несколько этапов.

Первый этап. Выразим все p токов в ветвях и напряжения между узлами через переменные состояния, входные воздействия и активные сопротивления. Для этого необходимо составить нужное количество уравнений по первому и второму законам Кирхгофа и решить эту систему относительно переменных состояний.

Второй этап. Напряжение $L_j x_j$ ($j=1, 2, \dots, l$) на каждой индуктивности выразим через найденные токи в ветвях и напря-

жения между узлами и активные сопротивления. В результате получим

$$L_j x_j = \sum_{i=1}^r B_{ji} x_i + \sum_{i=1}^k F_{ji} u_i, \quad (115)$$

где B_{ji} — безразмерный коэффициент, если x_i — напряжение на емкости, и имеет размерность сопротивления, если x_i — ток в индуктивности;

F_{ji} — безразмерный коэффициент, если u_i — входное напряжение, и имеет размерность сопротивления, если u_i — входной ток.

Третий этап. Ток $C_j x_j$ ($j=l+1, l+2, \dots, n$) через каждую емкость выразим также через найденные на первом этапе токи, напряжения и активные сопротивления. В результате получим

$$C_j x_j = \sum_{i=1}^r G_{ji} x_i + \sum_{i=1}^k H_{ji} u_i, \quad (116)$$

где G_{ji} — безразмерный коэффициент, если x_i — ток, и имеет размерность проводимости, если x_i — напряжение;

H_{ji} — безразмерный коэффициент, если u_i — входной ток, и имеет размерность проводимости, если u_i — входное напряжение.

Четвертый этап. Уравнения (115) и (116) поделим на L_j и C_j , соответственно, записав в матричной форме, получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \dots b_{1k} \\ b_{21} b_{22} \dots b_{2k} \\ \dots \dots \dots \\ b_{k1} b_{k2} \dots b_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

где

$$b_{ji} = \frac{F_{ji}}{L_i}, \quad a_{ji} = \frac{E_{ji}}{L_i}, \quad \text{если } j=1, 2 \dots l;$$

$$b_{ji} = \frac{H_{ji}}{C_j}, \quad a_{ji} = \frac{G_{ji}}{C_j}, \quad \text{если } j=k+1, k+2 \dots n.$$

Пятый этап. Все выходные величины y_1, y_2, \dots, y_n выразим через токи и напряжения, найденные на первом этапе и активное сопротивление. В результате получим

$$y_i = \sum_{i=1}^n C_{ji} x_i + \sum_{i=1}^k d_{ji} u_i \quad (j=1, 2 \dots p),$$

C_{ji} и d_{ji} — элементы матрицы \mathbf{C} и \mathbf{D} соответственно.

Пример 24. Написать уравнение состояния для цепи, изображенной на рис. 79. В качестве переменных состояния выберем токи в $L_1(x_1)$, $L_2(x_2)$ и напряжения на $C(x_3)$. За вход выберем u_1 и u_2 и выход y_1 и y_2 .

Решение.

Первый этап. Составим три уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2 и 3 и одно уравнение по второму закону для контура I и решим их

$$\begin{aligned} i_3 + u_2 &= x_1; \quad i_3 = x_1 - u_2; \\ i_4 &= i_3 + x_2; \quad i_4 = x_1 - u_2 + x_2; \\ i_5 + u_2 + i_4 &= i_C; \quad i_5 = -\frac{x_3}{r_5} - \frac{u_1}{r_5}; \\ u_1 &= -x_3 - i_5 r_5; \quad i_C = x_1 + x_2 - \frac{x_3}{r_5} - \frac{u_1}{r_5}. \end{aligned}$$

Второй этап. Выразим напряжение на индуктивностях $L_1 \dot{x}_1$ и $L_2 \dot{x}_2$ через переменные состояния и воздействия

$$\begin{aligned} L_1 \dot{x}_1 &= -x_1 r_1 - i_3 r_3 - i_4 r_4 - u_1 - x_3 = \\ &= -x_1(r_1 + r_3 + r_4) - x_2 r_4 - x_3 - u_1 + u_2(r_3 + r_4); \\ L_2 \dot{x}_2 &= -x_2 r_2 - i_4 r_4 - u_1 - x_3 = \\ &= -x_1 r_4 - x_2(r_2 + r_4) - x_3 - u_1 + u_2 r_4. \end{aligned} \quad (117)$$

Третий этап. Выразим ток i_C через переменные состояния и воздействия

$$C \dot{x}_3 = i_C = x_1 + x_2 - \frac{x_3}{r_5} - \frac{u_1}{r_5}. \quad (118)$$

Четвертый этап. Поделим (117) и (118) на L_1 , L_2 и C и, записав результат в матричной форме, получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{r_1+r_3+r_4}{L_1} & -\frac{r_4}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ -\frac{r_4}{L_2} & -\frac{r_2+r_4}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & -\frac{1}{Cr_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{r_3+r_4}{L_1} \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{r_4}{L_2} \\ -\frac{1}{r_5 C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пятый этап. Выразим выходное напряжение y_1 , и ток y_2 через переменные состояния и воздействия

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 r_1; \\ y_2 &= i_5 = -\frac{x_3}{r_5} - \frac{u_1}{r_5}. \end{aligned} \quad (119)$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Уравнения (119) и (120) являются уравнениями состояния в стандартной форме для цепи, изображенной на рис. 79. Из них легко

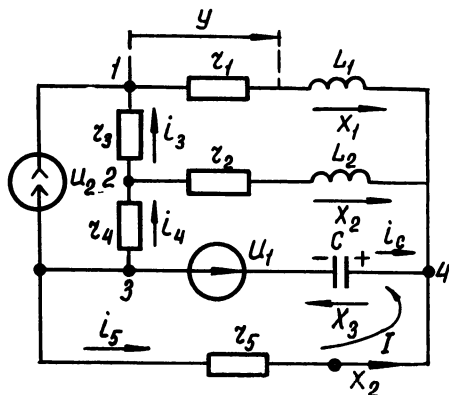


Рис. 79. Цепь rLC к примеру 23.

определяются матричные коэффициенты. Рассмотренные методы основаны на непосредственном составлении уравнений состояния.

Другой метод, отличный от рассмотренных, основан на определении матриц A , B , C , по которым однозначно записываются уравнения состояния. Если цепь содержит многоугольные емкостные и индуктивные звезды, то упомянутые методы составления уравнений не пригодны. В этом случае для n переменных состояния и их первых производных по времени составляется n уравнений по первому и второму законам Кирхгофа. Затем эти уравнения решаются относительно первых производных.

§ 11. Достоинства метода переменных состояния

Метод переменных состояния за последние несколько лет начал играть центральную роль в теории оптимального управления

как системами с ограничениями, так и без ограничений. Быстро растущий интерес к этому методу определился следующими его достоинствами.

1. Метод переменных состояния описывает поведение системы во временной области. Такой подход тесно связан с физической природой системы и позволяет глубже проникнуть в ее суть, чем это удастся сделать методом передаточных функций. С позиции этого метода легко объясняются такие понятия как управляемость и наблюдаемость системы.

2. Метод переменных состояния позволяет с единой точки зрения рассматривать как линейные, так и нелинейные, как стационарные, так и нестационарные системы. Однако при этом методе решение нелинейных задач остается трудным.

3. Данный метод действенен как с точки зрения вычислений, так и с точки зрения подхода к задачам анализа и синтеза высококачественных систем с многими входами и выходами.

4. Этот подход создает естественные предпосылки для формулировки некоторых задач оптимизации. При этом за количественную меру качества системы выбирается критерий, отражающий важнейшие характеристики системы. Такими характеристиками могут быть устойчивость, точность реакции на приложенные входные сигналы, нечувствительность к изменению параметров схемы.

5. Метод обеспечивает систематизированную запись решаемой системы уравнений, при этом параметры системы задаются в форме матрицы.

6. Метод удобен для счета на ЭВМ.

7. Переменные состояния позволяют легко определить энергетические соотношения в системе. Это в свою очередь создает удобство и облегчает обращение с начальными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Атабеков. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. М., «Энергия», 1966.
 2. Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. М., «Энергия», 1966.
 3. Л. Заде, Ч. Дезоер. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М., «Наука», 1970.
 4. П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. Пространство состояний в теории управления. М., «Наука», 1970.
 5. Л. А. Бессонов. Теоретические основы электротехники. М., «Высшая школа», 1964.
 6. С. Мезон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы. М., ИЛ, 1963.
 7. Ф. Реза, С. Сили. Современный анализ электрических цепей. М., «Энергия», 1964.
 8. Э. В. Зелях. Основы общей теории линейных электрических схем. М., изд-во АН СССР, 1951.
-

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	Стр. 3
Глава I. Методы анализа цепей и систем при принужденном экспоненциальном воздействии. Особенности расчета цепей с взаимной индукцией	5
§ 1. Цель анализа. Основные определения	5
§ 2. Метод преобразования схем	6
§ 3. Методы определяющих координат	19
§ 4. Общие свойства линейных цепей. Методы расчета	48
§ 5. Общие теоремы линейных цепей. Методы расчета	57
§ 6. Особенности анализа индуктивно связанных цепей	66
§ 7. Линейный трансформатор. Уравнения и схемы замещения . .	77
Глава II. Элементы теории линейных систем. Анализ цепей и систем методом переменных состояния	84
§ 1. Системный подход к изучению явлений природы. Система . .	84
§ 2. Пример анализа систем методом переменных состояния (одномерный случай). Каноническая форма уравнений состояния	85
§ 3. Составление системы дифференциальных уравнений в нормальной форме методом переменных состояния. Векторная каноническая форма уравнений состояния	89
§ 4. Основные понятия теории систем. Состояние	96
§ 5. Другие понятия теории систем	99
§ 6. Основные свойства состояния	101
§ 7. Стационарность и линейность	105
§ 8. Уравнение состояния и его решение в общем виде	112
§ 9. Линейные стационарные системы. Переходная матрица состояния	116
§ 10. Методика составления уравнений состояния	120
§ 11. Достоинства метода переменных состояния	125
Литература	126

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ

Учебное пособие

Часть II

Научный редактор доц. канд. техн. наук **Ф. В. Щепеткин**

Редактор издательства **Л. И. Маликова**

Технические редакторы **В. П. Шабанова, И. М. Олерская**

Корректоры **Т. И. Дюрягина, Д. И. Макрушина**

Редакционно-издательский отдел УПИ им. С. М. Кирова
Свердловск, 620002, УПИ, главный учебный корпус

НС 17355.	Сдано в набор 3/VII 1973 г.	Заказ 289.
	Подписано к печати 19/IX 1974 г.	
Печ. л. 8.	Уч.-изд. л. 9,74.	Цена 76 к. Бумага 60×90 ¹ / ₁₆ . Тираж 1200.

Типография изд-ва «Уральский рабочий», г. Свердловск,
просп. Ленина, 49

Цена 76 коп.